Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

Sistemas financieros en riesgo sistémico. Una aproximación axiomática

Autor: Víctor Calzón Molina

Director: Dr. Pedro Calleja Cortés
Realizado en: Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Barcelona, 21 de junio de 2020

Abstract

This project aims to study, with an axiomatic approach, financial systems in systemic risk under the principles of limited liability of equity, proportionality, and priority of debt claims. Following the steps in the article by Larry Eisenberg and Thomas H. Noe, *Systemic Risk in Financial Systems*, Management Science 47(2): 236-249, 2001, we prove results related to the existence, uniqueness, and characterisation of solutions. Finally, we apply to our framework the no advantageous merging and no advantageous splitting concepts outlined by M. Angeles de Frutos in *Coalitional manipulations in a bankruptcy problem*, Review of Economic Design 4, 255-272, 1999, in order to estudy their compatibility along the principles of limited liability of equity, proportionality, and priority of debt claims.

Resumen

En este trabajo estudiamos de forma axiomática los sistemas financieros en riesgo sistémico bajo los principios de responsabilidad limitada, prioridad de las deudas y proporcionalidad. Siguiendo el artículo de Larry Eisenberg y Thomas H. Noe, *Systemic Risk in Financial Systems*, Management Science 47(2): 236-249, 2001, demostramos resultados relacionados con la existencia, la unicidad y la caracterización de soluciones. Finalmente trasladamos a nuestro modelo los conceptos de no manipulabilidad por fusión y no manipulabilidad por escisión definidos por M. Angeles de Frutos en *Coalitional manipulations in a bankruptcy problem*, Review of Economic Design 4, 255-272, 1999, para estudiar su compatibilidad con los principios de responsabilidad limitada, prioridad de las deudas y proporcionalidad.

2010 Mathematics Subject Classification. 91B32, 91G40

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi tutor Pedro Calleja por haberme asesorado en este trabajo y por sus valiosos consejos.

En segundo lugar, me gustaría agradecer a mi familia y amigos su apoyo a lo largo de la carrera.

Índice

1. Introducción

1.1. El problema de bancarrota

Un problema de bancarrota es un problema de asignación o división de recursos escasos entre un grupo de agentes. Cada agente de este grupo tiene derecho a recibir cierta cantidad de estos recursos, sin embargo la cantidad total de estos es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los agentes. Este problema puede observarse en la vida real en diversas situaciones como puede ser el reparto de una herencia o la liquidación de una empresa.

Veamos un ejemplo. Supongamos que una empresa, a la que llamaremos A, se halla en una situación tal que es incapaz de hacer frente a sus obligaciones por que son superiores a los recursos económicos de que dispone para pagarlas. Supongamos que dichos recursos, o activos, tienen un valor de 10000 euros y que la empresa A tiene obligaciones con cuatro acreedores B, C, D y E por valor de 5000, 10000, 3000 y 2000 euros respectivamente. En la siguiente tabla representamos la información que se refiere a la distribución y al valor de las obligaciones de A.

Acreedor	Valor de la deuda de A
B	5000
C	10000
D	3000
E	2000

Cuadro 1: Distribución y valoración de las deudas de A en euros

Claramente el monto total al que ascienden las deudas de A supera el valor de sus activos. Entonces, cómo deberían repartirse estos 10000 euros entre los acreedores?

El problema de bancarrota ha sido estudiado extensamente, especialmente a lo largo de las últimas décadas. Las primeras menciones a este problema pueden hallarse en el Talmud babilónico y se remontan al 1140 a.C. (ver O'Neill, 1982 [2]). En estos escritos se han hallado algunos ejemplos simples de dicho problema sin llegar a ahondar en el criterio general en el que se basan estos ejemplos. Este, sin embargo, ha sido el objeto de estudio de personas como Robert J. Aumann y Michael Maschler (1985) [3], en cuyo artículo se elaboran soluciones generales, para resolver cualquier problema de bancarrota, consistentes con los ejemplos hallados en el Talmud. Quizás, quien ha investigado de manera más extensa y exhaustiva este problema es William Thomson (2003) [5], quien, entre otras cosas, ha estudiado algunos principios generales según los que hacer el reparto de los recursos. Algunos de los más importantes son el igualitarismo en ganancias, el igualitarismo en perdidas y la proporcionalidad. Veámoslos en el ejemplo anterior. Para cumplir el principio de igualitarismo en perdidas debemos distribuir los 10000 euros de A entre los acreedores de manera que todos pierdan lo mismo sin que ninguno tenga que aportar una cantidad adicional de euros. Para cumplir el principio de igualitarismo en ganancias debemos distribuir los 10000 euros de A de manera que todos los acreedores ganen lo mismo sin que ninguno de ellos obtenga más de lo que se le debía. Finalmente, para cumplir el principio de proporcionalidad debemos distribuir los 10000 euros de A de manera que cada acreedor reciba una porción de estos igual a la porción de las deudas que A tiene con él sobre el total de estas. A continuación mostramos en un cuadro las cantidades que recibiría cada acreedor de acuerdo con cada principio.

Acreedor	Igualitarismo en perdidas	Igualitarismo en ganancias	Proporcionalidad
B	2333,33	2666,66	2500
C	7333,33	2666,66	5000
D	333,33	2666,66	1500
E	0	2000	1000

Cuadro 2: Cantidades o pagos recibidos en euros según cada principio

El principio de proporcionalidad es el que hoy en día es aplicado en la mayoría de casos en que un recurso homogéneo debe repartirse entre distintos agentes, y el que sigue en la mayoría de leyes sobre bancarrota, aunque ha sido discutido y estudiado desde Aristóteles (ver Aristóteles [10]). Por este motivo será el principio que estudiaremos en este trabajo.

1.2. Sistemas financieros en riesgo sistémico

El 15 de septiembre de 2008 la institución financiera Lehman Brothers se declaró oficialmente en bancarrota. Esto tuvo un coste para la economía estadounidense de 22 billones de dolares y ha sido considerado por los analistas como uno de los eventos más importantes que detonaron la crisis global. Este ejemplo puso de manifiesto que las instituciones financieras no están aisladas, sino que están conectadas, de manera que la solvencia de una institución depende en mayor o menor medida de la solvencia de aquellas otras instituciones con las que realiza transacciones. Así pues, podemos ver como el problema de bancarrota tal y como se ha presentado en la subsección 1.1 es insuficiente para representar situaciones como la bancarrota de Lehman Brothers.

En este trabajo queremos estudiar este tipo de situaciones, en particular, queremos estudiar el comportamiento de sistemas financieros en riesgo sistémico, esto es, sistemas financieros con riesgo de colapso sistémico por la quiebra encadenada de empresas que tienen obligaciones cruzadas. En estos sistemas financieros los agentes pueden ser al mismo tiempo acreedores y deudores, tejiendo una red de conexiones, por medio de las deudas contraídas, a través de la que pueden extenderse los efectos de la quiebra de uno o más agentes, llegando a provocar una cadena de quiebras. Veamos con un ejemplo como la quiebra de una empresa puede causar una cadena de quiebras.

Supongamos que tenemos un sistema financiero formado por cinco agentes a los que llamaremos agentes 1, 2, 3, 4 y 5. Cada uno de estos agentes cuenta con propiedades y efectivo con los que hacer frente a sus deudas. En el cuadro 3 representamos el valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente.

Agente	Valor total de las propiedades y el efectivo
1	2000
2	1000
3	2000
4	2000
5	1000

Cuadro 3: valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente

Los agentes de este sistema financiero tienen obligaciones unos con otros. En el cuadro 4 representamos el valor en euros de estas obligaciones. Por ejemplo, la entrada de la fila 3 y la columna 4 nos informa de que el agente 3 debe 5000 euros al agente 4.

	1	2	3	4	5
1	0	3000	4000	0	1000
2	1000	0	1500	0	5000
3	2000	3500	0	5000	0
4	500	0	4000	0	2500
5	0	0	5000	4000	0

Cuadro 4: Valor en euros de las deudas entre los agentes del sistema financiero

Supongamos que, en caso de quiebra, un agente debe repartir sus activos cumpliendo el principio de proporcionalidad, como vimos en la subsección 1.1. Supongamos también que cuando un agente quiebra los que tienen deudas con él están obligados a liquidarlas.

Dado que el agente 1 tiene deudas por valor de $3000 + 4000 + 1000 = 8000$ euros y activos, contando sus propiedades, su efectivo y lo que los demás agentes le deben, por valor de $2000 + (1000 + 2000 + 500) = 5500$ euros, el agente 1 quiebra. Como consecuencia de esto los agentes 2, 3 y 4 deben liquidar sus deudas con 1. A continuación el agente 1 debe repartir sus activos entre los agentes 2, 3 y 5 siguiendo el principio de proporcionalidad, de modo que el agente 1 paga 2062,5 euros al agente 2, 2750 al agente 3 y 678,5 al agente 5. Tras hacerse efectivos los pagos obtenemos el cuadro 5, donde representamos el valor total de las propiedades y el efectivo de cada agente tras las quiebra de 1. Por ejemplo el agente 2 tiene 1000-1000+2062,5=2062,5 euros como resultado de la liquidación de su deuda con el agente 1 (-1000) y del pago de 2062,5 euros que ha recibido.

Agente	Valor total de las propiedades y el efectivo
1	0
2	2062,5
3	2750
4	1500
5	1687,5

Cuadro 5: valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra del agente 1

También el cuadro de las deudas ha cambiado tras la quiebra del agente 1, obteniendo el nuevo cuadro 6. Podemos observar como las deudas que los demás agentes tenían con el agente 1 han sido liquidadas y las que el agente 1 tenía con los demás se han considerado satisfechas tras hacerse efectivos los pagos.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1500	0	5000
3	0	3500	0	5000	0
4	0	0	4000	0	2500
5	0	0	5000	4000	0

Cuadro 6: Valor en euros de las deudas entre los agentes tras la quiebra del agente 1

Ahora, tras la quiebra del agente 1, el agente 2 tiene deudas por valor de 1500+5000=6500 euros y activos por valor de 2062,5+3500=5562,5 euros. Por lo tanto el agente 2 quiebra. De nuevo se liquidan las deudas que 3 tiene con 2 y a continuación 2 reparte sus activos siguiendo el principio de proporcionalidad. Representamos en el cuadro 7 el valor total de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra de 2.

Agente	Valor total de las propiedades y el efectivo
1	0
2	0
3	533,65
4	1500
5	5966,35

Cuadro 7: valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra del agente 2

Como antes, el cuadro que representa el valor de las deudas ha cambiado, de modo que obtenemos el nuevo cuadro 8, donde se recoge el valor de las deudas entre los agentes tras la quiebra de 2.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	5000	0
4	0	0	4000	0	2500
5	0	0	5000	4000	0

Cuadro 8: Valor en euros de las deudas entre los agentes tras la quiebra del agente 2

Esta vez, tras la quiebra del agente 2, es el agente 5 quien quiebra, ya que tiene unas deudas por valor de 5000+4000=9000 euros y unos activos por valor de 5966,35+2500=8466,35 euros. Siguiendo el mismo proceso que cuando quebraron los agentes 1 y 2, representamos en el cuadro 9 el valor total de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra de 5.

Agente	Valor total de las propiedades y el efectivo
1	0
2	0
3	5237,18
4	2762,82
5	0

Cuadro 9: valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra del agente 5

El cuadro 10 recoge el valor de las deudas entre los agentes tras la quiebra de 5.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	5000	0
4	0	0	4000	0	0
5	0	0	0	0	0

Cuadro 10: Valor en euros de las deudas entre los agentes tras la quiebra del agente 5

Finalmente se produce la quiebra de 4. De nuevo repetimos el mismo proceso hasta obtener el valor total de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra de 4, obteniendo el cuadro 11.

Agente	Valor total de las propiedades y el efectivo
1	0
2	0
3	8000
4	0
5	0

Cuadro 11: valor total en euros de las propiedades y el efectivo de cada agente tras la quiebra del agente 4

El cuadro 12 recoge el valor de las deudas entre los agentes tras la quiebra de 4.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Cuadro 12: Valor en euros de las deudas entre los agentes tras la quiebra del agente 4

Dado que no existen más deudas entre los agentes 1, 2, 3, 4 y 5 podemos dar por finalizado el ejemplo.

Así pues, hemos visto como en un sistema financiero en riesgo sistémico la quiebra de un agente puede provocar una cadena de quiebras. En este caso hemos determinado los pagos cumpliendo el principio de proporcionalidad, pero, como hemos visto, existen otros principios para determinar los pagos de una entidad quebrada a sus acreedores.

1.3. El concepto de solución

En la subsección anterior hemos resuelto un subsistema financiero en riesgo sistémico particular. Sin embargo, en este trabajo consideraremos que una solución es una propuesta, para cada sistema financiero en riesgo sistémico, de que partes de las deudas debe devolver cada agente. Así pues, una solución asigna a cada sistema financiero una configuración de pagos, sean estos sistemas financieros simples, esto es, sistemas financieros en los que hay un solo agente que quiebra y varios acreedores, o sistemas financieros complejos, es decir, tales que los agentes pueden ser al mismo tiempo deudores y acreedores. Por ejemplo, dado el sistema financiero simple descrito en la subsección 1.1, una solución podría proponer la configuración de pagos a los acreedores descrita en el cuadro 2 que satisface el principio de igualitarismo en perdidas, otra podría proponer la que satisface el principio de igualitarismo en ganancias y por último, otra podría proponer la que satisface el principio de proporcionalidad.

Este trabajo toma una aproximación axiomática. Un axioma, en este contexto, es una propiedad o principio filosófico que nos gustaría mantener para nuestra propuesta de solución. Siguiendo a Eisenberg i Noe, 2001 [1], entendemos que la proporcionalidad debe ser uno de estos axiomas. De modo que si una empresa quiebra deberá pagar proporcionalmente a las deudas que tiene con las demás empresas. Además impondremos que las solucionas satisfagan la condición de responsabilidad limitada, esto es, que los accionistas de una empresa que quiebra no responden con su patrimonio personal a las deudas de dicha empresa, y la condición de prioridad de las deudas, es decir, que si una empresa quiebra, el pago de sus deudas es prioritario, de modo que, hasta que no se hayan satisfecho, los accionistas no reciben dividendos.

A modo de resumen, trataremos de estudiar axiomáticamente el comportamiento de sistemas financieros en riesgo sistémico. En particular estudiaremos las soluciones de los sistemas financieros en riesgo sistémico que satisfacen las condiciones o principios de proporcionalidad, responsabilidad limitada y prioridad de las deudas.

Estructura de la Memoria

Iniciaremos la memoria en la sección 2, donde definiremos y demostraremos los resultados matemáticos necesarios para este trabajo. Empezaremos con una primera subsección de retículos donde demostraremos un teorema muy importante en este trabajo, el *teorema de Tarski*. A continuación daremos algunas nociones de teoría de grafos, en particular de grafos dirigidos. Para acabar presentaremos una subsección de matrices donde demostraremos la regularidad de un subconjunto de matrices.

En la sección 3 construiremos axiomáticamente un marco, basado principalmente en el trabajo de Eisenberg i Noe (2001), sobre el que estudiaremos las soluciones de sistemas financieros en riesgo sistémico bajo las condiciones o principios de responsabilidad limitada (RL), prioridad de las deudas (PD) y proporcionalidad (P). Al final de esta sección veremos que el estudio de estas soluciones es equivalente al estudio de los puntos fijos de un subconjunto de funciones.

En la sección 4 demostraremos la existencia de soluciones de sistemas financieros en riesgo bajo las condiciones (RL), (PD) y (P), a continuación veremos que estas condiciones no son suficientes para garantizar la unicidad de estas soluciones en general, pero que existe un subconjunto de sistemas financieros que si tienen una única solución bajo las condiciones (RL), (PD) y (P). Llamaremos a estos sistemas financieros, sistemas financieros regulares.

En la sección 5 presentaremos el algoritmo construido por Eisenberg y Noe (2001) para hallar la solución de cualquier sistema financiero regular bajo las condiciones (RL), (PD) y (P). Junto con la memoria del trabajo presentaremos un programa informático, programado en el lenguaje de programación C, que emplea este algoritmo.

Por último, en la sección 6 presentaremos una extensión del trabajo de de Frutos, 1999 [4] al marco de este trabajo y estudiaremos si en un sistema financiero en riesgo, bajo las condiciones (RL), (PD) y (P), los agentes tienen o no incentivos a fusionarse, juntando sus deudas y comportándose como un solo agente, o a subdividirse, separando sus deudas y comportándose como múltiples agentes.

2. Preliminares matemáticos

2.1. Retículos

En esta parte seguiremos, hasta llegar al teorema de Tarski, el libro de Garret Birkhoff [7] de la página 1 hasta la 16 y la parte preliminar del artículo de Alfred Tarski (1955) [6], es decir, las páginas 285 y 286.

Un **conjunto parcialmente ordenado** es un par $\langle X, \succsim \rangle$ formado por un conjunto X no vacío y una relación binaria $\succsim$ definida sobre X que satisface las siguientes propiedades

1. $\forall x \in X$, $x \succsim x$. (Reflexiva)
2. $\forall x, z \in X$, si $x \succsim z$ y además $z \succsim x$, entonces $x = z$. (Antisimétrica)
3. $\forall x, z, t \in X$, si $x \succsim z$ y $z \succsim t$, entonces $x \succsim t$. (Transitiva)

La relación $x \succsim y$ también puede escribirse como $y \precsim x$.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \succsim \rangle$ y un subconjunto no vacío $P \subseteq X$, definimos sobre P la relación binaria inducida por la inclusión $P \subseteq X$ como

$$x \succsim_P z \iff x, z \in P \text{ y } x \succsim z.$$

Proposición 2.1. *Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces $\langle P, \succsim_P \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado para todo subconjunto no vacío P de X.*

Demostración. La demostración se deduce de manera directa de la inclusión $P \subseteq X$. $\square$

Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq P \subseteq X$, decimos que $a \in X$ es una **cota superior de P en X** si $a \succsim p$, $\forall p \in P$. Análogamente decimos que $b \in X$ es una **cota inferior de P en X** si $b \precsim p$ $\forall p \in P$.

Definición 2.2. *Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq P \subseteq X$, decimos que $u \in X$ es el* ***supremo de P en X*** *si es una cota superior de P en X y $u \precsim a$ para toda cota superior a de P en X. Análogamente decimos que $v \in X$ es el* ***ínfimo de P en X*** *si es una cota inferior de P en X y $v \succsim b$ para toda cota inferior b de P en X.*

Teorema 2.3. *Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq P \subseteq X$, de existir un supremo u o un ínfimo v de P en X, este debe ser único.*

Demostración. Supongamos que existen dos supremos $u, u' \in X$ de P en X, entonces, por la definición de supremo, y dado que u y u' son cotas superiores de P en X, $u \precsim u'$ y $u' \precsim u$. Por lo tanto, por la propiedad Antisimétrica de la relación binaria, $u = u'$. Del mismo modo, supongamos que existen dos ínfimos $v, v' \in X$ de P en X, entonces, $v \succsim v'$ y $v' \succsim v$, por lo que $v = v'$. $\square$

Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq P$ un subconjunto de X, de existir, notamos el supremo de P en X como $\cup_X P$ y el ínfimo como $\cap_X P$.

Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \succsim \rangle$ tal que, $\forall x, z \in X$, el conjunto $\{x, z\}$ tiene un supremo y un ínfimo en X. Es decir, tal que, $\forall x, z \in X$, $\exists \cup_X \{x, z\}, \cap_X \{x, z\}$.

Definición 2.4. *Decimos que un retículo* $\langle X, \succsim \rangle$ *es* ***completo*** *si todo subconjunto* $\emptyset \neq P$ *de* X *tiene un supremo y un ínfimo en* X.

Definición 2.5. *Sea* $\langle X, \succsim \rangle$ *un retículo, dados dos elementos* $x, y \in X$ *tales que* $x \precsim y$, *definimos*

$$[x, y] := \{z \in X : x \precsim z \precsim y\}.$$

Lema 2.6. *Sea* $\langle X, \succsim \rangle$ *un retículo y sean* $x, z \in X$ *tales que* $x \precsim z$, *entonces*

a) $\left\langle [x, z], \succsim_{[x,z]} \right\rangle$ *es un retículo.*

b) si $\langle X, \succsim \rangle$ *es un retículo completo, entonces* $\left\langle [x, z], \succsim_{[x,z]} \right\rangle$ *también lo es.*

Demostración a). En primer lugar, dado que $x, z \in [x, z]$, podemos afirmar que $[x, z] \neq \emptyset$. En segundo lugar, por la proposición 2.1, podemos afirmar que $\left\langle [x, z], \succsim_{[x,z]} \right\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. En tercer lugar, dado que $\langle X, \succsim \rangle$ es un retículo, $\forall a, b \in [x, z] \subseteq X$ existen $\cup_X \{a, b\}, \cap_X \{a, b\} \in X$. Sean $a, b \in [x, z]$, puesto que $a, b \in [x, z]$, x y z son respectivamente una cota inferior y superior de $\{a, b\}$. Por lo que $x \precsim \cup_X \{a, b\} \precsim z$, y $x \precsim \cap_X \{a, b\} \precsim z$, es decir, $\cup_X \{a, b\}, \cap_X \{a, b\} \in [x, z]$. Dado que la relación binaria $\succsim_{[x,z]}$ es la inducida por la inclusión y dado que $\cup_X \{a, b\}, \cap_X \{a, b\} \in [x, z]$, entonces $\cup_{[x,z]} \{a, b\} = \cup_X \{a, b\}$ y $\cap_{[x,z]} \{a, b\} = \cap_X \{a, b\}$, demostrando a).

Demostración b). Únicamente debemos demostrar que $\left\langle [x, z], \succsim_{[x,z]} \right\rangle$ es completo. Sea $B \subseteq [x, z] \subseteq X$, dado que X es completo, existen $\cup_X B, \cap_X B \in X$. Puesto que $B \subseteq [x, z]$, x y z son respectivamente una cota inferior y superior de B en X. Por lo tanto $x \precsim \cup_X B \precsim z$, y $x \precsim \cap_X B \precsim z$, es decir, $\cup_X B, \cap_X B \in [x, z]$. Finalmente, dado que la relación binaria $\succsim_{[x,z]}$ es la inducida por la inclusión y dado que $\cup_X B, \cap_X B \in [x, z]$, tenemos que $\cup_{[x,z]} B = \cup_X B$ y $\cap_{[x,z]} B = \cap_X B$, demostrando b).

$\square$

Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un retículo, sean B y P subconjuntos de X no vacíos y sea f una función de B a P. Decimos que f es monótona si

$$\forall x, y \in B, \;\; x \succsim y \Longrightarrow f(x) \succsim f(y).$$

Además, decimos que $x \in B$ es un punto fijo de f si $x = f(x)$.

Observación 2.7. Sea $\langle X, \succsim \rangle$ un retículo y sea $P \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Podemos observar que, por definición de $\langle P, \succsim_P \rangle$, $\forall a, b \in P$, si $a \succsim_P b$, entonces $a \succsim b$. Podemos observar también que, $\forall x, z \in X$ tales que $x \succsim z$, $x \succsim_P z$ si y solamente si $x, z \in P$. Tras hacer estas observaciones podemos determinar que la única diferencia entre ambas relaciones binarias es el conjunto del que toman los elementos. Por lo tanto, para facilitar la lectura usaremos la notación $\succsim$ para ambos casos salvo en la propia definición del retículo $\langle P, \succsim_P \rangle$.

Para demostrar el siguiente teorema hemos seguido principalmente la demostración de Alfred Tarski (1995), en particular las paginas 286 y 287.

Teorema 2.8. *(Teorema de Tarski o Teorema retículo-teórico del punto fijo)*
Sean:

- $\langle X, \succsim \rangle$ *un retículo completo.*
- $f : X \to X$ *una función monótona.*
- P *el conjunto de puntos fijos de* f.
- $G_f := \{x \in X : f(x) \succsim x\}$ *y* $L_f := \{x \in X : f(x) \precsim x\}$.

1) Entonces existen $\cup_X P$ *y* $\cap_X P$ *y, por lo tanto,* $P \neq \emptyset$. *Además*

$$\cup_X P = \cup_X G_f \in P \quad y \quad \cap_X P = \cap_X L_f \in P.$$

2) $\langle P, \succsim_P \rangle$ *es un retículo completo.*

Demostración 1). En primer lugar veamos que los conjuntos G_f y L_f son no vacíos. En efecto, dado que $\langle X, \succsim \rangle$ es un retículo completo, existen $\cup_X X$ y $\cap_X X$. Por definición $x \precsim \cup_X X$ y $x \succsim \cap_X X$ $\forall x \in X$, en particular $f(\cup_X X) \precsim \cup_X X$ y $f(\cap_X X) \succsim \cap_X X$. De modo que $\cup_X X \in L_f$ y $\cap_X X \in G_f$. Demostrando que son conjuntos no vacíos.
Sea

$$u := \cup_X G_f \tag{1}$$

que existe porque $\langle X, \succsim \rangle$ es completo. Tenemos por definición que $x \precsim u$ $\forall x \in G_f$. Dado que f es monótona $f(x) \precsim f(u)$ $\forall x \in G_f$, de modo que $x \precsim f(x) \precsim f(u)$ $\forall x \in G_f$ y por lo tanto $x \precsim f(u)$ $\forall x \in G_f$. Por lo tanto $f(u)$ es una cota superior de G_f. Puesto que u es el supremo en X de este conjunto, se debe cumplir que

$$u \precsim f(u). \tag{2}$$

De esto último y de la monotonía de f se deduce que $f(u) \precsim f(f(u))$, y por lo tanto que $f(u) \in G_f$. En consecuencia, por (1)

$$f(u) \precsim u. \tag{3}$$

Finalmente, de (2) y (3) podemos deducir que $u = f(u)$, además por (1) $u = \cup_X P$ ya que $P := \{x \in X : f(x) = x\} \subseteq G_f$ y $u \in P$, de modo que

$$u = \cup_X P \in P. \tag{4}$$

Sea

$$v := \cap_X L_f \tag{5}$$

que existe porque $\langle X, \succsim \rangle$ es completo. Tenemos por definición que $v \precsim x$ $\forall x \in L_f$. Dado que f es monótona $f(v) \precsim f(x)$ $\forall x \in L_f$, de modo que $f(v) \precsim f(x) \precsim x$ $\forall x \in L_f$ y por lo tanto $f(v) \precsim x$ $\forall x \in L_f$. Por lo tanto $f(v)$ es una cota inferior de L_f. Dado que v es el ínfimo en X de este conjunto, se debe cumplir que

$$f(v) \precsim v. \tag{6}$$

De esto último y de la monotonía de f se deduce que $f(f(v)) \precsim f(v)$, y por lo tanto que $f(v) \in L_f$. En consecuencia, por (5)

$$v \precsim f(v) \tag{7}$$

Finalmente, de (6) y (7) podemos deducir que $v = f(v)$, además por (5) $v = \cap_X P$ ya que $P := \{x \in X : f(x) = x\} \subseteq L_f$ y $v \in P$, de modo que

$$v = \cap_X P \in P. \tag{8}$$

Demostración 2). Dado que $P \neq \emptyset$, por la proposición 2.1, $\langle P, \succsim_P \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para demostrar que $\langle P, \succsim_P \rangle$ es un retículo completo demostraremos que, dado un subconjunto $Y \subseteq P$ no vacío cualquiera, existen $\cup_P Y$ y $\cap_P Y$.
Sea $Y \subseteq P$ un subconjunto no vacío, dado que $\langle X, \succsim \rangle$ es un retículo completo, existen $\cup_X Y$ y $\cap_X Y$.
Definimos los siguiente conjuntos

$$A := [\cup_X Y, \cup_X X] \quad y \quad C := [\cap_X X, \cap_X Y].$$

Por el lema 2.6 $\langle A, \succsim_A \rangle$ y $\langle C, \succsim_C \rangle$ son retículos completos.
$\forall x \in Y$ se cumple que $x \precsim \cup_X Y$ y, dado que f es monótona, $f(x) \precsim f(\cup_X Y)$ $\forall x \in Y$. Por lo tanto $x = f(x) \precsim f(\cup_X Y)$ $\forall x \in Y$, es decir,

$$x \precsim f(\cup_X Y) \;\; \forall x \in Y. \tag{9}$$

De (9) podemos deducir que $f(\cup_X Y)$ es una cota superior de Y, de modo que por la definición de supremo de Y en X

$$\cup_X Y \precsim f(\cup_X Y). \tag{10}$$

Sea $z \in X$ tal que $\cup_X Y \precsim z$, puesto que f es monótona y por (10)

$$\cup_X Y \precsim f(\cup_X Y) \precsim f(z). \tag{11}$$

Por (11) tenemos que $f(A) \subseteq A$, de modo que restringiendo el dominio de f al intervalo A obtenemos una función monótona $f_A : A \to A$ bien definida. Sea P_A el conjunto de puntos fijos de f_A, aplicando el resultado 1 al retículo completo $\langle A, \succsim_A \rangle$ y a la función monótona f_A, obtenemos que existe $\cap_A P_A$ y que $\cap_A P_A = \cap_A L f_A \in P_A$. En particular obtenemos que, dado que $P_A \subseteq P$ por la definición de f_A, $\cap_A P_A \in P$.
Como $\cap_A P_A \in A$, obtenemos $\cup_X Y \precsim \cap_A P_A$. Por lo tanto $x \precsim \cap_A P_A$ $\forall x \in Y$, es decir, $\cap_A P_A$ es una cota superior de Y en P.
Supongamos que existe una cota superior s de Y en P tal que $s \precsim \cap_A P_A$. Dado que $P \subseteq X$, entonces $\cup_X Y \precsim s$, es decir, $s \in A$ y por lo tanto $s \in P_A$. Finalmente, por la definición de ínfimo en A, $\cap_A P_A \precsim s$, llegando a la conclusión que $s = \cap_A P_A$.
Por lo tanto $\cap_A P_A = \cup_P Y$ y, puesto que hemos visto que $\cap_A P_A$ existe, obtenemos que existe $\cup_P Y$.

$\forall x \in Y$ se cumple que $x \succsim \cap_X Y$ y, dado que f es monótona, $f(x) \succsim f(\cap_X Y)$ $\forall x \in Y$. Por lo tanto $x = f(x) \succsim f(\cap_X Y)$ $\forall x \in Y$, es decir,

$$x \succsim f(\cap_X Y) \quad \forall x \in Y. \tag{12}$$

De (12) podemos deducir que $f(\cap_X Y)$ es una cota inferior de Y, de modo que, por la definición de ínfimo de Y en X

$$\cap_X Y \succsim f(\cap_X Y). \tag{13}$$

Sea $z \in X$ tal que $\cap_X Y \succsim z$, puesto que f es monótona y por (13)

$$\cap_X Y \succsim f(\cap_X Y) \succsim f(z). \tag{14}$$

Por (14) tenemos que $f(C) \subseteq C$, de modo que restringiendo el dominio de f al intervalo C obtenemos una función monótona $f_C : C \to C$ bien definida. Sea P_C el conjunto de puntos fijos de f_C, aplicando el resultado 1 al retículo completo $\langle C, \succsim_C \rangle$ y a la función monótona f_C, obtenemos que existe $\cup_C P_C$ y que $\cup_C P_C = \cup_C G f_C \in P_C$. En particular obtenemos que, dado que $P_C \subseteq P$ por la definición de f_C, $\cup_C P_C \in P$.
Como $\cup_C P_C \in C$, obtenemos $\cap_X Y \succsim \cup_C P_C$. Por lo tanto $x \succsim \cup_C P_C$ $\forall x \in Y$, es decir, $\cup_C P_C$ es una cota inferior de Y en P.
Supongamos que existe una cota inferior t de Y en P tal que $t \succsim \cup_C P_C$. Dado que $P \subseteq X$, entonces $\cap_X Y \succsim t$, es decir, $t \in C$ y por lo tanto $t \in P_C$. Finalmente, por la definición de supremo en C, $\cup_C P_C \succsim t$, llegando a la conclusión que $t = \cup_C P_C$.
Por lo tanto $\cup_C P_C = \cap_P Y$ y, puesto que hemos visto que $\cup_C P_C$ existe, obtenemos que existe $\cap_P Y$.

$\square$

Si consideramos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la relación de orden habitual $\geq$, es evidente que $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ es un retículo y que dados $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cup_{\mathbb{R}} \{x, y\} = \text{máx}\{x, y\} \quad \text{y} \quad \cap_{\mathbb{R}} \{x, y\} = \text{mín}\{x, y\}.$$

Dado un subconjunto A no vacío de $\mathbb{R}$ notaremos $\sup A := \cup_{\mathbb{R}} A$ y $\text{ínf}\, A := \cap_{\mathbb{R}} A$.

Teorema 2.9. *(Axioma del supremo)*
Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente tiene supremo, esto es, dado un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente, existe $\sup A$.

Teorema 2.10. *Dado un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado inferiormente, existe* $\text{ínf}\, A$.

Tras ver estos teoremas, es fácil comprobar que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$, $\left\langle [a, b], \geq_{[a,b]} \right\rangle$ es un retículo completo.

Definición 2.11. *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, si definimos sobre $\mathbb{R}^n$ la relación binaria $\succsim$ como sigue:*

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad v \succsim w \iff v_i \geq w_i,$$

entonces $\langle \mathbb{R}^n, \succsim \rangle$ es un retículo.

En efecto, es directo comprobar que $\succsim$ satisface la propiedad reflexiva, la antisimétrica y la transitiva y por lo tanto comprobar que $\langle \mathbb{R}^n, \succsim \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para ver que es también un retículo basta con observar que, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\cup \{v, w\} = (\text{máx}\{v_1, w_1\}, \text{máx}\{v_2, w_2\}, ..., \text{máx}\{v_n, w_n\}) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\cap \{v, w\} = (\text{mín}\{v_1, w_1\}, \text{mín}\{v_2, w_2\}, ..., \text{mín}\{v_n, w_n\}) \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos finalmente que, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que $u \precsim v$, entonces $\left\langle [u, v], \succsim_{[u,v]} \right\rangle$ es un retículo completo.
Dado un subconjunto no vacío $P \subseteq [u, v]$ consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$P_i := \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que existe algún } w \in P : w_i = x\}.$$

Es evidente que, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, P_i está acotado superior e inferiormente por v_i y u_i respectivamente, es decir, que $\forall x \in P_i$, $u_i \leq x \leq v_i$. Por lo tanto, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, existe $\sup P_i$ e $\text{ínf} P_i$ y ademas $u_i \leq \text{ínf} P_i \leq \sup P_i \leq v_i$. Visto esto, es fácil comprobar que existen $\cup_{[u,v]}P$ y $\cap_{[u,v]}P$ y que

$$\cup_{[u,v]}P = \{\sup P_1, \sup P_2, ..., \sup P_n\}$$

$$\cap_{[u,v]}P = \{\text{ínf} P_1, \text{ínf} P_2, ..., \text{ínf} P_n\}.$$

2.2. Grafos

En esta breve parte sobre grafos dirigidos empleamos la misma notación y definiciones que en el libro de J. A. Bondy y U. S. R. Murty [8] en las páginas 171-174.

Un **grafo dirigido** D es una terna ordenada $(V(D), A(D), \Psi_D)$ formada por un conjunto no vacío de vértices $V(D)$, un conjunto de aristas $A(D)$ y una función de incidencia Ψ_D : que asocia a cada arista de D un par ordenado de vértices de D. Dados $a \in A(D)$ y $u, v \in V(D)$ tales que $\Psi_D(a) = (u, v)$, diremos que a une u hacia v y que u y v son respectivamente la cola y la cabeza de a.

Dado un grafo dirigido D, decimos que $a \in A(D)$ es un **lazo** si y solamente si $\Psi_D(a) = (v, v)$ para algún vértice $v \in V(D)$. Decimos que un grafo dirigido D es **simple** si y solamente si no tiene lazos y la función Ψ_D es inyectiva.

Dado un grafo dirigido D, un **camino dirigido** en D es una secuencia finita y no nula $W = (v_0, a_1, v_1, ..., a_k, v_k)$ formada alternadamente por vértices y aristas de D tales que, para $i = 1, 2, ..., k$, la cola y la cabeza de la arista a_i son v_{i-1} y v_i respectivamente. Decimos que W es un camino que de v_0 a v_k. Cuando D es un grafo dirigido simple, dado que para todo par de vértices $u, v \in V(D)$ existe como mucho una única arista $a \in A(D)$ tal que $\Psi_D(a) = (u, v)$, escribimos $W = (v_0, v_1, ..., v_k)$. Si $W = (v_0, a_1, v_1, ..., a_k, v_k)$ es un camino dirigido en D tal que las aristas $a_1, a_2, ..., a_k$ y los vértices $v_0, v_1, ..., v_k$ son diferentes, entonces decimos que W es un **camino simple dirigido** en D.

Dado un grafo dirigido D, si $W = (v_s, ..., v_k)$ y $X = (v_r, ..., v_t)$ son dos caminos dirigidos en D tales que $v_k = v_r$ entonces los podemos concatenar obteniendo como resultado el camino $(v_s, ..., v_k, ..., v_r)$ que notaremos como $W + X = (v_s, ..., v_k, ..., v_r)$.

Definición 2.12. *Dado un grafo dirigido D definimos para cada vértice $v \in V(D)$ la **órbita** de v, $o(v)$, como*

$$o(v) = \{u \in V(D) \text{ tales que existe un camino simple dirigido en } D \text{ de } v \text{ a } u\}.$$

2.3. Matrices

Sea M una matriz con m filas y n columnas. Una **submatriz** de M es una matriz formada seleccionando un subconjunto de filas y un subconjunto de columnas. Sea $F \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ el conjunto de índices del subconjunto de las filas escogidas y $C \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de índices del subconjunto de las columnas escogidas, entonces notaremos la submatriz formada por las filas F y las columnas C como $M[F; C]$. Decimos que una submatriz $M[F; C]$ de A es principal si y solamente si $F = C$. Notaremos como M_{ij} al elemento de M en la fila i y la columna j. Fijémonos en que, si $i \in F$ y $j \in C$, entonces $M[F; C]_{ij} = M_{ij}$.
Sea M una matriz de n filas y n columnas, sea $I = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de índices de

filas y columnas y sea $i \in I$, podemos definir el determinante de M de forma recursiva como:

$$Det(M) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji}(-1)^{i+j} Det(M[I \setminus \{j\}\,; I \setminus \{i\}]).$$

Análogamente podríamos definirlo como:

$$Det(M) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(-1)^{i+j} Det(M[I \setminus \{i\}\,; I \setminus \{j\}]).$$

Indicaremos el cálculo del determinante de una matriz situándola entre barras verticales, esto es, dada una matriz M de n filas y columnas, notaremos $Det(M) = |M|$.

Observación 2.13. Sea M una matriz de n filas y columnas y sea $I = \{1, 2, ..., n\}$. Si existe alguna fila $i \in I$ tal que $M_{ij} = 0\ \forall j \in I \setminus \{k\}$, donde $k \in I$, y tal que $M_{ik} \neq 0$, entonces

$$Det(M) = M_{ik}(-1)^{i+k} Det(M[I \setminus \{i\}\,; I \setminus \{k\}]).$$

Si en cambio existe alguna columna $i \in I$ tal que $M_{ji} = 0\ \forall j \in I \setminus \{k\}$, donde $k \in I$, y tal que $M_{ki} \neq 0$, entonces

$$Det(M) = M_{ki}(-1)^{k+i} Det(M[I \setminus \{k\}\,; I \setminus \{i\}]).$$

Si todos los elementos de una fila o una columna de M son nulos entonces $Det(M) = 0$.

Sea M una matriz, diremos que M es **regular** si $Det(M) \neq 0$. Si $Det(M) = 0$ diremos que M es **singular**.

El determinante de una matriz tiene diversas propiedades, a continuación mostramos algunas de ellas, ya que serán necesarias para demostrar algunos resultados.
Sea M una matriz:

Propiedad 1. Multiplicar todos los elementos de una fila o una columna por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplica el determinante de M por este escalar. Es decir, sea M' la matriz que obtenemos como resultado de multiplicar todos los elementos de una fila o una columna por λ, entonces $Det(M') = \lambda Det(M)$.

Propiedad 2. Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila o a una columna un múltiplo de otra columna no altera el determinante de M.

Propiedad 3. Intercambiar la posición de dos filas o dos columnas de M únicamente invierte el signo del determinante de M.

Definición 2.14. *Dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, una matriz de n filas y columnas, formada por números reales. Sea $I = \{1, 2, ..., n\}$. Decimos que M es una **R-matriz** si y solamente si satisfacen las siguientes condiciones:*

Condición 1. $M_{ii} = 1$, $\forall i \in I$.

Condición 2. $M_{ij} \in [-1, 0]$ *si* $i \neq j$.

Condición 3. $\forall j \in I$, $\sum_{i \in I \setminus \{j\}} M_{ij} \geq -1$.

Condición 4. *Para todo subconjunto no vacío J de I, la matriz principal $M[J;J]$ cumple que existe $j \in J$ tal que*

$$\sum_{i \in J \setminus \{j\}} M[J;J]_{ij} > -1.$$

En este trabajo demostraremos un resultado importante de forma alternativa a lo que se demuestra en la literatura. El siguiente teorema es una parte fundamental de esta demostración diferente y, por lo que conocemos, es un resultado nuevo en la teoría de las matrices.

Teorema 2.15. *Toda R-matriz es regular.*

Demostración. Demostraremos este teorema por inducción sobre n, donde n es el número de filas y de columnas.

Si $n = 1$, entonces M es una matriz formada por una fila y una columna y cuyo único elemento es $M_{11} = 1$. Por lo tanto $Det(M) = 1$ y por lo tanto M es regular.

Hipótesis de inducción: toda R-matriz de $n-1$ filas y columnas es regular.

Sea M una R-matriz formada por n filas y columnas y sea $I = \{1, 2, ..., n\}$, entonces

$$M = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & 1 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por la condición 4 existe $j \in I$ tal que

$$\sum_{i \in I \setminus \{j\}} M_{ij} > -1,$$

ya que $M[I,I] = M$. Podemos suponer que $j = n$ ya que, de suceder lo contrario, podríamos intercambiar las columnas j y n para que fuese cierto, y esto, por la propiedad 3, únicamente alteraría el signo del determinante de M. Supongamos pues, que

$$\sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} > -1. \tag{1}$$

(1) junto con la condición 2 implica que, $\forall i \in I \setminus \{n\}$, $M_{in} \in (-1, 0]$. En efecto, si suponemos que existe $k \in I \setminus \{n\}$ tal que $M_{kn} = -1$, entonces

$$-1 = M_{kn} \geq \sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} > -1,$$

llegando a una conclusión absurda. Por lo tanto

$$M_{in} \in (-1, 0] \quad \forall i \in I \setminus \{n\}. \tag{2}$$

Ahora tomemos M y eliminemos los elementos de la última columna que están sobre la diagonal. Para ello, si queremos eliminar M_{in}, donde $i \in I \setminus \{n\}$, le restamos a la fila i la fila n multiplicada por M_{in}, obteniendo la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 - M_{1n} \cdot M_{n1} & M_{12} - M_{1n} \cdot M_{n2} & \cdots & 0 \\ M_{21} - M_{2n} \cdot M_{n1} & 1 - M_{2n} \cdot M_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por la propiedad 2, $Det(M) = Det(B)$. Finalmente, como hemos visto en la observación 2.13, dado que todos los elementos de la última columna excepto uno son cero, tenemos que, si

$$C = \begin{pmatrix} 1 - M_{1,n} \cdot M_{n,1} & M_{1,2} - M_{1,n} \cdot M_{n,2} & \cdots & M_{1,n-1} - M_{1,n} \cdot M_{n,n-1} \\ M_{2,1} - M_{2,n} \cdot M_{n,1} & 1 - M_{2,n} \cdot M_{n,2} & \cdots & M_{2,n-1} - M_{2,n} \cdot M_{n,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n-1,1} - M_{n-1,n} \cdot M_{n,1} & M_{n-1,2} - M_{n-1,n} \cdot M_{n,2} & \cdots & 1 - M_{n-1,n} \cdot M_{n,n-1} \end{pmatrix},$$

entonces $Det(B) = 1 \cdot (-1)^{n+n} \cdot Det(C) = Det(C)$. Ahora, si tomamos cada columna i de C y dividimos sus elementos entre el elemento de la columna i que esta sobre la diagonal de C obtenemos la matriz D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{M_{1,2} - M_{1,n} \cdot M_{n,2}}{1 - M_{2,n} \cdot M_{n,2}} & \cdots & \dfrac{M_{1,n-1} - M_{1,n} \cdot M_{n,n-1}}{1 - M_{n-1,n} \cdot M_{n,n-1}} \\ \dfrac{M_{2,1} - M_{2,n} \cdot M_{n,1}}{1 - M_{1,n} \cdot M_{n,1}} & 1 & \cdots & \dfrac{M_{2,n-1} - M_{2,n} \cdot M_{n,n-1}}{1 - M_{n-1,n} \cdot M_{n,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{M_{n-1,1} - M_{n-1,n} \cdot M_{n,1}}{1 - M_{1,n} \cdot M_{n,1}} & \dfrac{M_{n-1,2} - M_{n-1,n} \cdot M_{n,2}}{1 - M_{2,n} \cdot M_{n,2}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que D está bien definida. En efecto, dado que por (2) $M_{in} \in (-1, 0]$ $\forall i \in I \setminus \{n\}$ y dado que, por la condición 2, $M_{ij} \in [-1, 0]$ si $i \neq j$, tenemos que $M_{in} \cdot M_{ni} \in [0, 1)$ para $i \in I \setminus \{n\}$, y por lo tanto que

$$1 - M_{in} \cdot M_{ni} \in (0, 1]. \tag{3}$$

Dado que hemos multiplicado cada fila de C por un escalar, tenemos, por la propiedad 1, que

$$det(D) = Det(C) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - M_{in} \cdot M_{ni}}$$

y por lo tanto, dado que $Det(M) = Det(C)$, tenemos que

$$det(M) = Det(D) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - M_{in} \cdot M_{ni}).$$

Dado que $1 - M_{in} \cdot M_{ni} \in (0, 1]$ para $i \in I \setminus \{n\}$, tenemos que $\prod_{i=1}^{n-1}(1 - M_{in} \cdot M_{ni}) \neq 0$ y por lo tanto que $Det(M) \neq 0$ si y solamente si $Det(D) \neq 0$.

Para demostrar que $Det(D) \neq 0$ demostraremos que D es una R-matriz, y puesto que tiene $n-1$ filas y columnas, podremos aplicar la hipótesis de inducción.

Prueba de que D es una R-matriz:

Condición 1: Que $D_{ii} = 1 \ \forall i \in I \setminus \{n\}$ es evidente.

Condición 3: Sea $j \in I \setminus \{n\}$, tenemos que

$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} D_{ij} = \sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} \frac{M_{ij} - M_{in} \cdot M_{nj}}{1 - M_{jn} \cdot M_{nj}} \geq -1 \iff$$
$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} (M_{ij} - M_{in} \cdot M_{nj}) \geq M_{jn} \cdot M_{nj} - 1 \iff$$
$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} M_{ij} - M_{nj}[\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} M_{in}] - M_{nj} \cdot M_{jn} \geq -1 \iff$$
$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} M_{ij} - M_{nj} \sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} \geq -1.$$

Por (1) y dado que M satisface la condición 2, tenemos que $\sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} \in (-1, 0]$ y por lo tanto $-\sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} \in [0, 1)$, de modo que

$$-M_{nj} \sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} \geq M_{nj}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} M_{ij} - M_{nj} \sum_{i \in I \setminus \{n\}} M_{in} \geq \sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} M_{ij} + M_{nj} = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} M_{ij} \geq -1.$$

Donde la última desigualdad es consecuencia de que M satisface la condición 3. Por lo tanto

$$\sum_{i \in I \setminus \{n,j\}} D_{ij} \geq -1 \quad \forall j \in I \setminus \{n\}. \tag{4}$$

Condición 2: Veamos que, $\forall i, j \in I \setminus \{n\}$ tales que $i \neq j$, $D_{ij} \leq 0$.

$$M_{ij} - M_{in} \cdot M_{nj} \leq M_{ij} \leq 0 \quad \text{para} \quad i, j \in I \setminus \{n\}. \tag{5}$$

De (3) y de (5) se deduce que

$$D_{ij} = \frac{M_{ij} - M_{in} \cdot M_{nj}}{1 - M_{jn} \cdot M_{nj}} \leq 0 \quad \forall i, j \in I \setminus \{n\}. \tag{6}$$

Finalmente de (4) y (6) se deduce que D satisface la condición 2.

Condición 4: Supongamos que existe un subconjunto no vacío $K \subseteq I \setminus \{n\}$ tal que

$$\sum_{i \in K \setminus \{j\}} D[K;K]_{ij} \leq -1 \quad \forall j \in K.$$

Dado que $\sum_{i\in K\setminus\{j\}} D[K;K]_{ij} \geq \sum_{i\in I\setminus\{n,j\}} D_{ij}$ y por (4), tenemos que

$$-1 \geq \sum_{i\in K\setminus\{j\}} D[K;K]_{ij} \geq \sum_{i\in I\setminus\{n,j\}} D_{ij} \geq -1,$$

por lo tanto, necesariamente

$$\sum_{i\in K\setminus\{j\}} D[K;K]_{ij} = -1.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in K\setminus\{j\}} D[K;K]_{ij} = -1 \iff \\
\sum_{i\in K\setminus\{j\}} \frac{M_{ij} - M_{in}\cdot M_{nj}}{1 - M_{jn}\cdot M_{nj}} = -1 \iff \\
\sum_{i\in K\setminus\{j\}} (M_{ij} - M_{in}\cdot M_{nj}) = M_{jn}\cdot M_{nj} - 1 \iff \\
\sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{ij} - M_{nj} \sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{in} = M_{jn}\cdot M_{nj} - 1 \iff \\
\sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{ij} - M_{nj} \sum_{i\in K} M_{in} = -1.
\end{aligned}$$

La última identidad es cierta solamente si $M_{nj} = 0$. En efecto, supongamos que $M_{nj} < 0$, entonces dado que $K \subseteq I \setminus \{n\}$, tenemos por (1) que $\sum_{i\in K} M_{in} > -1$, de modo que

$$-1 = \sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{ij} - M_{nj} \sum_{i\in K} M_{in} > \sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{ij} - M_{nj}(-1) \geq \sum_{i\in I\setminus\{j\}} M_{ij} \geq -1.$$

llegando a una conclusión absurda. Por lo tanto $M_{nj} = 0$ y en consecuencia

$$\sum_{i\in K\setminus\{j\}} M_{ij} = -1 \quad \forall j \in K.$$

Sin embargo esto contradice que M sea una R-matriz, en particular contradice la condición 4, ya que si tomamos $K \subseteq I$, que es no vacío por hipótesis, tenemos que

$$\sum_{i\in K\setminus\{j\}} M[K;K]_{ij} = -1 \quad \forall j \in K.$$

De modo que D debe satisfacer que para todo subconjunto no vacío K de $I\setminus\{n\}$, $D[K;K]$ cumple que existe $k \in K$ tal que

$$\sum_{i\in K\setminus\{k\}} D[K;K]_{ik} > -1,$$

lo cual termina la demostración de que D es una R-matriz de dimensión $n-1$ y por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que $Det(D) \neq 0$, demostrando que M es regular. $\square$

3. Sistemas financieros en riesgo sistémico. El modelo

Con el modelo siguiente pretendemos estudiar el comportamiento de sistemas financieros en riesgo sistémico, especialmente, como hemos visto en la introducción, en aquellos casos en los que la quiebra de una o más entidades financieras o agentes que conforman este sistema son susceptibles de provocar la quiebra de otras entidades financieras.

De ahora en adelante, dado un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}$ denotaremos como $|N|$ la cardinalidad de N y denotaremos también $\mathcal{N} := \{N \subseteq \mathbb{N} : |N| \text{ es finita }\}$. En el marco de este trabajo consideraremos que un sistema financiero es una red formada por un conjunto finito $N \in \mathcal{N}$ de agentes económicos que tienen obligaciones entre si. Para representar cuantitativamente estas obligaciones empleamos una **matriz de obligaciones nominales** $L \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ donde $L_{ij} \geq 0$ representa la cantidad que el agente $i \in N$ debe al agente $j \in N$. Supondremos que, $\forall i \in N$, $L_{ii} = 0$, esto es, que un agente no puede tener deudas consigo mismo.

Cada entidad del sistema financiero puede disponer de recursos, ya sea en forma de efectivo u otros activos, para hacer frente a sus obligaciones. Representaremos cuantitativamente estos recursos en **un vector de efectivos** $e \in \mathbb{R}^{|N|}$ donde e_i representa la cantidad de efectivo que tiene el agente $i \in N$. Si los bienes de que dispone un agente son más ilíquidos podemos suponer que la cantidad recogida en el vector de efectivo es el valor que se le imputa a estos bienes.

Ahora que contamos con los elementos suficientes, podemos definir formalmente un sistema financiero.

Definición 3.1. *Un* ***sistema financiero*** *es una terna ordenada (N, L, e) formada por un conjunto finito $N \in \mathcal{N}$ de agentes, una matriz de obligaciones nominales $L \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ y un vector de efectivos $e \in \mathbb{R}^{|N|}$. Notaremos con el símbolo Γ el conjunto de sistemas financieros.*

Como veremos más adelante será útil recoger el valor total de las obligaciones de cada agente. Para ello emplearemos un vector $\bar{p} \in \mathbb{R}^{|N|}$ al que llamaremos **vector agregado de obligaciones** y que definiremos de la siguiente manera. Dado un sistema financiero (N, L, e),

$$\bar{p}_i(N, L, e) = \sum_{j\in N} L_{ij} \quad \forall i \in N.$$

Para satisfacer sus obligaciones, los agentes de un sistema financiero deberán realizar pagos. Podemos recoger estos pagos en una **matriz de pagos** $P \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ donde P_{ij} es el pago que el agente $i \in N$ efectúa al agente $j \in N$. Supondremos que las matrices de pagos satisfacen dos condiciones. En primer lugar supondremos que $P_{ii} = 0 \; \forall i \in N$, es decir, que ningún agente efectuará pagos dirigidos a si mismo. En segundo lugar supondremos que $0 \leq P_{ij} \leq L_{ij} \; \forall i, j \in N$, esto es, que los pagos deben tener sentido económico $(0 \leq P_{ij})$ y que están acotados por las obligaciones.

Definición 3.2. *Dado un sistema financiero (N, L, e) y una matriz de pagos $P \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$, definimos el valor neto de un agente $i \in N$ como*

$$VN_i^{(N,L,e)}(P) = e_i + \sum_{j\in N} P_{ji} - \sum_{j\in N} P_{ij}$$

es decir, la suma de sus activos menos la suma de sus pasivos.

El siguiente paso para estudiar el comportamiento de los sistemas financieros es definir el concepto de solución. Una **solución** es una función que asigna a cada sistema financiero una matriz de pagos. Es decir, una solución es una función $S : \Gamma \to \bigcup_{N \in \mathcal{N}} \mathbb{R}^{|N| \times |N|}$ tal que, dado un sistema financiero (N, L, e),

- $S(N, L, e) \in R^{|N| \times |N|}$.
- $0 \leq S_{ij}(N, L, e) \leq L_{ij}$, $\forall i, j \in N$.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de soluciones que configuran los pagos proporcionalmente a las obligaciones de cada agente. Por este motivo definimos, dado un sistema financiero (N, L, e), la **matriz relativa de pasivos** $\Pi \in \mathbb{R}^{|N| \times |N|}$ de forma que para cada $i, j \in N$

$$\Pi_{ij}(N, L, e) = \begin{cases} \dfrac{L_{ij}}{\bar{p_i}(N, L, e)} & \text{si } \bar{p_i}(N, L, e) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{p_i}(N, L, e) = 0 \end{cases}$$

Como podemos observar, esta matriz recoge que parte del total de las obligaciones de cada agente tienen los demás.

También definimos, dado un sistema financiero (N, L, e) y una solución S, el **vector de pagos totales** $p \in \mathbb{R}^{|N|}$ de forma que, para cada $i \in N$,

$$p_i(S(N, L, e)) = \sum_{j \in N} S_{ij}(N, L, e).$$

En este trabajo nos centraremos en el estudio de aquellas soluciones que satisfacen las propiedades de responsabilidad limitada, prioridad de las deudas y proporcionalidad.

- Decimos que una solución S satisface la propiedad de **responsabilidad limitada (RL)** si, dado un sistema financiero cualquiera (N, L, e), $\forall i \in N$,

  $$VN_i^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) \geq 0.$$

  Esto es, si dado un sistema financiero cualquiera, S le asigna una matriz de pagos tal que todos los agentes del sistema tienen un valor neto positivo tras realizar los pagos y, por lo tanto, tal que los accionistas no responden con su patrimonio personal a las deudas de dicho agente.

- Decimos que una solución S satisface la propiedad de **prioridad de las deudas (PD)** si, dado un sistema financiero cualquiera (N, L, e), $\forall i \in N$,

  $$VN_i^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) > 0 \Longrightarrow S_{ij}(N, L, e) = L_{ij} \ \ \forall j \in N.$$

  Esto es, si dado un sistema financiero cualquiera, S le asigna una matriz de pagos tal que un agente tiene un valor neto estrictamente positivo solamente si ha satisfecho todas sus deudas y, por lo tanto, tal que hasta que no se hayan satisfecho todas las deudas del agente, sus accionistas no reciben dividendos.

- Decimos que una solución S satisface la condición de **proporcionalidad (P)** si, dado un sistema financiero cualquiera (N, L, e), $\forall i, j \in N$,

  $$S_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e) p_i(S(N, L, e)).$$

Esto es, si dado un sistema financiero cualquiera, S le asigna una matriz de pagos tal que el pago que un agente debe efectuar a otro es proporcional a las obligaciones que el primero tiene con el segundo respecto de las obligaciones totales del primero.

Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, denotamos

$$u \wedge v := \{\text{mín}\{u_1, v_1\}, \text{mín}\{u_2, v_2\}, ..., \text{mín}\{u_n, v_n\}\}.$$

Definición 3.3. *Dado un sistema financiero (N, L, e) y una solución S, definimos la aplicación asociada a (N, L, e), $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$, como:*

$$\Phi^{(N,L,e)}(v) := (\Pi(N, L, e)^T v + e) \wedge \bar{p}(N, L, e).$$

Para aligerar la notación, de ahora en adelante, y siempre y cuando no haya riesgo de confusión, dado un sistema financiero (N, L, e) y una solución S notaremos $S(N, L, e)$ como S, $p(S(N, L, e))$ como p, $\Pi(N, L, e)$ como Π, $\bar{p}(N, L, e)$ como $\bar{p}$, $VN^{(N,L,e)}(S(N, L, e))$ como $VN(S)$ y finalmente $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ como Φ.

Teorema 3.4. *(Teorema de equivalencia)*
Sea S una solución, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S satisface (RL), (PD) y (P).

b) $\forall (N, L, e) \in \Gamma$ existe un punto fijo $v^{(N,L,e)}$ de $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tal que

$$\forall i, j \in N \quad S_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e) v_i^{(N,L,e)}.$$

Demostración.
a) $\Rightarrow$ b)

Dado que S satisface (P), $S_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e) p_i(S(N, L, e))$ $\forall i, j \in N$. Por lo tanto, basta con ver que $p(S(N, L, e))$ es un punto fijo de $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$.

Sea (N, L, e) un sistema financiero y sea $i \in N$, dado que S cumple (P),

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j - p_i,$$

y dado que S cumple (RL) y (PD), $\forall i \in N$,

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j - p_i \geq 0$$

$$\text{y si } VN(S)_i > 0 \Longrightarrow S_{ij} = L_{ij} \;\; \forall j \in N \iff p_i = \bar{p}_i.$$

De modo que, si $i \in N$ es un agente tal que $VN_i(S) = 0$, entonces

$e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j = p_i \leq \bar{p}_i$, lo cual implica que $\text{mín}\left\{ e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i \right\} = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j = p_i$.

Si en cambio $i \in N$ es un agente tal que $VN_i(S) > 0$, entonces

$$e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j > p_i = \bar{p}_i \text{ y, por lo tanto, } \min\left\{e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i\right\} = \bar{p}_i = p_i.$$

Por lo tanto $p = \Phi(p)$.

b) $\Rightarrow$ *a)*

Sea (N, L, e) un sistema financiero, sea $v = v^{(N,L,e)}$ el punto fijo de $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tal que $S_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e)v_i \ \forall i, j \in N$ y sea $p = p(S(N, L, e))$.

Veamos que $v = p$.
Si $i \in N$ es un agente tal que $\bar{p}_i > 0$, tenemos que $p_i := \sum_{j \in N} S_{ij} = \sum_{j \in N} \Pi_{ij} v_i = \sum_{j \in N} \dfrac{L_{ij}}{\bar{p}_i} v_i = v_i$.
Si en cambio $i \in N$ es un agente tal que $\bar{p}_i = 0$, entonces, dado que $v_i = \Phi_i(v)$, tenemos que $v_i = 0$ y, dado que $S_{ij} = \Pi_{ij} v_i$, tenemos que $S_{ij} = 0 \ \forall j \in N$, de modo que $p_i := \sum_{j \in N} S_{ij} = 0 = v_i$.
Así pues, $v_i = p_i \ \forall i \in N$, es decir, $v = p$, y por lo tanto p es un punto fijo de Φ y

$$S_{ij} = \Pi_{ij} p_i \quad \forall i, j \in N,$$

demostrando que S satisface (P).

Dado que S satisface (P), tenemos que

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j - p_i \quad \forall i \in N.$$

Dado que $p = \Phi(p)$, tenemos que $p_i = \min\left\{e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i\right\}$, por lo tanto

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j - \min\left\{e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i\right\} \geq 0,$$

demostrando que S satisface (RL). Además

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j - \min\left\{e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T p_j, \bar{p}_i\right\} > 0 \iff p_i = \bar{p}_i,$$

y dado que S satisface (P), tenemos que $p_i = \bar{p}_i \iff S_{ij} = L_{ij} \ \forall j \in N$. Por lo tanto

$$VN_i(S) > 0 \iff S_{ij} = L_{ij} \ \forall j \in N,$$

demostrando que S también satisface (PD).

$\square$

4. Existencia y unicidad de soluciones

En esta sección demostraremos resultados importantes en relación a la existencia y unicidad de soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P). En relación a la existencia, en primer lugar demostraremos que dichas soluciones existen y en segundo lugar que el valor neto de los agentes de un sistema financiero es invariante para soluciones que satisfacen estas tres propiedades. En relación a la unicidad veremos, por medio de un ejemplo, que existen sistemas financieros que admiten más de una solución que cumple (RL), (PD) y (P), sin embargo demostraremos que existe un subconjunto $\Gamma_r \subseteq \Gamma$ tal que las soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P) restringidas al dominio Γ_r son únicas.

Dado un sistema financiero (N, L, e) trabajaremos sobre el retículo completo $\left\langle [0, \bar{p}], \succsim_{[0,\bar{p}]} \right\rangle$ (véase la definición 2.11).

4.1. Existencia

Para demostrar los resultados de existencia es necesario probar algunos resultados previos.

Lema 4.1. *Dado un sistema financiero (N, L, e) la aplicación $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \rightarrow [0, \bar{p}(N, L, e)]$ es monótona.*

Demostración. La demostración se deduce fácilmente del hecho de que $\Pi(N, L, e)$ es una matriz cuyos componentes son positivos. □

Lema 4.2. *Sea (N, L, e) un sistema financiero y sea $P \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ una matriz de pagos, entonces*

$$\sum_{i\in N} VN_i^{(N,L,e)}(P) = \sum_{i\in N} e_i.$$

Demostración. En efecto, dado que, $\forall i \in N$,

$$VN_i^{(N,L,e)}(P) = e_i + \sum_{j\in N} P_{ji} - \sum_{j\in N} P_{ij}$$

tenemos que

$$\sum_{i\in N} VN_i^{(N,L,e)}(P) = \sum_{i\in N} e_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} P_{ji} - \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} P_{ij} = \sum_{i\in N} e_i.$$

□

El lema 4.2 formaliza un resultado intuitivo, esto es, que si en un sistema financiero todos los pagos se realizan a agentes dentro del mismo, aunque el valor neto de cada agente pueda variar tras hacerse efectivos los pagos, la suma de los valores netos de los agentes del sistema debe ser la misma.

Lema 4.3. *Sea (N, L, e) un sistema financiero, sea $v \in \mathbb{R}^{|N|}$ un punto fijo de Φ y sea $P \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ la matriz definida como $P_{ij} := \Pi_{ij} v_i$, $\forall i, j \in N$, entonces*

$$VN_i^{(N,L,e)}(P) = \max \left\{ e_i + \sum_{j\in N} \Pi_{ij}^T v_j - \bar{p}_i, 0 \right\} \quad \forall i \in N.$$

Demostración. Sea $i \in N$, dado que $\max\{a,b\} = -\min\{-a,-b\}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
VN_i^{(N,L,e)}(P) =& e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T v_j - v_i \\
=& e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T v_j - \min\left\{ e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T, \bar{p}_i \right\} \\
=& e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T v_j + \max\left\{ -e_i - \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T, -\bar{p}_i \right\} \\
=& \max\left\{ 0, e_i + \sum_{j \in N} \Pi_{ij}^T v_j - \bar{p}_i \right\}.
\end{aligned}$$

□

A través del lema 4.3 podemos ver que, dado que bajo las condiciones (RL), (PD) y (P) los agentes de un sistema financiero pagan el mínimo entre cuanto tienen y cuanto deben, su valor neto tras hacerse efectivos los pagos debe ser como mínimo cero y estrictamente positivo solamente si han satisfecho todas sus obligaciones.

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ definimos $(v)^+ := (\max\{v_1, 0\}, \max\{v_2, 0\}, ..., \max\{v_n, 0\})$.

Teorema 4.4. *(teorema de compatibilidad e invariabilidad del valor neto)*

1. *(RL), (PD) y (P) son compatibles.*
2. *Sean S y S' dos soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P) y sea (N, L, e) un sistema financiero, entonces*

$$VN_i^{(N,L,e)}(S(N,L,e)) = VN_i^{(N,L,e)}(S'(N,L,e)) \quad \forall i \in N.$$

Demostración 1. Es suficiente demostrar, por el teorema de equivalencia, que, dado un sistema financiero cualquiera (N, L, e), la función $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tiene algún punto fijo. En efecto, si demostramos esto, tomamos para cada sistema financiero (N, L, e) uno de estos puntos fijos $v^{(N,L,e)} \in \mathbb{R}^{|N|}$ y definimos la solución S de forma que

$$S(N,L,e) \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|} \quad \text{y} \quad S_{ij}(N,L,e) {=} \Pi_{ij}(N,L,e) v_i^{(N,L,e)} \quad \forall i,j \in N$$

entonces, por el teorema de equivalencia, S cumplirá (RL), (PD) y (P).

Para demostrar que $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tiene algún punto fijo aplicamos el teorema de Tarski al retículo completo $\left\langle [0, \bar{p}(N, L, e)], \succsim_{[0,\bar{p}(N,L,e)]} \right\rangle$ y a la función monótona $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$.

Demostración 2. Sea (N, L, e) un sistema financiero, sea $FIX(\Phi) := \{v \in [0, \bar{p}] : v = \Phi(v)\}$ y sea $p^+ := \cup_{[0,\bar{p}]} FIX(\Phi)$, del que sabemos que $p^+ \in FIX(\Phi)$ por el teorema de Tarski. Es suficiente demostrar, por el teorema de equivalencia, que, $\forall v \in FIX(\Phi)$,

$$e + \Pi^T v - v = e + \Pi^T p^+ - p^+. \tag{1}$$

Sean $P, P' \in \mathbb{R}^{|N|\times|N|}$ tales que $P_{ij} = \Pi_{ij} v_i$ y $P'_{ij} = \Pi_{ij} p_i^+ \ \forall i, j \in N$. Por el lema 4.3 sabemos que

$$e + \Pi^T v - v = (e + \Pi^T v - \bar{p})^+ \quad \text{y} \quad e + \Pi^T p^+ - p^+ = (e + \Pi^T p^+ - \bar{p})^+$$

Dado que por definición $p^+ \gtrsim v$ y dado que la función $\mu(w) = (e+\Pi^T w - \bar{p})^+$ es monótona, tenemos que

$$(e + \Pi^T p^+ - \bar{p})^+ \gtrsim (e + \Pi^T v - \bar{p})^+$$

y, por lo tanto, que

$$e + \Pi^T p^+ - p^+ \gtrsim e + \Pi^T v - v. \tag{2}$$

Supongamos que existe $i \in N$ tal que

$$e_i + \sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} p_j^+ - p_i^+ > e_i + \sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} v_j - v_i. \tag{3}$$

Entonces

$$\sum_{i\in N} e_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} p_j^+ - \sum_{i\in N} p_i^+ > \sum_{i\in N} e_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} v_j - \sum_{i\in N} v_i,$$

es decir,

$$\sum_{i\in N} VN_i^{(N,L,e)}(P) > \sum_{i\in N} VN_i^{(N,L,e)}(P')$$

Sin embargo esto contradice el lema 4.2, por lo que (3) debe ser falso. Lo cual demuestra, junto con (2), que la identidad (1) es cierta.

□

Este es quizás uno de los resultados más sorprendentes de este trabajo. No solo somos capaces de demostrar que existen soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P) sino también que el valor neto de los agentes de un sistema financiero es invariante para este tipo de soluciones. Este hecho es de gran importancia, ya que a los agentes de un sistema financiero lo que les importa es su valor neto tras hacerse efectivos los pagos.

4.2. Unicidad

Veamos un ejemplo que refuta la hipótesis de unicidad de soluciones que cumplen (RL), (PD) y (P).

Ejemplo 4.5. Supongamos que tenemos un sistema financiero $A = (N, L, e)$ compuesto por dos agentes tales que su matriz nominal de pasivos y su vector de efectivo son respectivamente

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^T = (0, 0).$$

A partir de la matriz L podemos obtener

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \ y \ \ \bar{p}^T = (1, 1).$$

Finalmente definimos $\forall t \in [0,1]$ la matriz de pagos $P_t \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$P_t := \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

P_t es una matriz de pagos $\forall t \in [0,1]$, ya que $0 \leq t \leq 1$. Además $VN_i^{(A)}(P_t) = 0\ \forall t \in [0,1]$ y para $i \in \{1,2\}$. Ninguno de los agentes tiene un valor neto estrictamente positivo para ningún $t \in [0,1]$ y finalmente los pagos se reparten proporcionalmente, lo cual es fácilmente comprobable.

Ahora, sea S una solución que satisface (RL), (PD) y (P), cuya existencia conocemos, si definimos el siguiente conjunto de soluciones $\forall t \in [0,1]$

$$S^t(N,L,e) := \begin{cases} S(N,L,e) & \text{si} \quad (N,L,e) \in \Gamma \setminus \{A\} \\ \quad P_t & \text{si} \quad \quad (N,L,e) = A \end{cases}$$

podemos observar, por lo que acabamos de ver, que S^t satisface (RL), (PD) y (P) $\forall t \in [0,1]$.

Ahora que hemos visto que no existe una única solución que satisface (RL), (PD) y (P) daremos algunas nociones previas para definir el subconjunto Γ_r de Γ del que hablamos al principio de esta sección.

Definición 4.6. *Dado un sistema financiero (N,L,e) decimos que un subconjunto no vacío $B \subseteq N$ es un **subsistema cerrado** de (N,L,e) si y solamente si*

$$L_{ij} = 0 \;\; \forall i \in B \text{ y } \forall j \in N \setminus B \quad \text{y} \quad \sum_{i\in B} e_i > 0.$$

Observación 4.7. Si observamos el ejemplo 4.5 podemos comprobar que, dado que $e^T = (0,0)$, N no es un subsistema cerrado.

Un subsistema cerrado de un sistema financiero es un subconjunto de agentes que solo tienen obligaciones entre ellos, de ahí que lo llamemos cerrado y que cuenta con una cantidad estrictamente positiva de efectivo.

A continuación demostramos un resultado intuitivo, esto es, que en todo subsistema cerrado de un sistema financiero debe existir algún agente con un valor neto positivo.

Proposición 4.8. *Dado un sistema financiero (N,L,e), una solución S que satisface (P) y un subsistema cerrado B de (N,L,e), entonces existe $i \in B$ tal que*

$$VN_i^{(N,L,e)}(S(N,L,e)) > 0.$$

Demostración. Por definición

$$VN_i(S) = e_i + \sum_{j\in N} S_{ji} - \sum_{j\in N} S_{ij} \quad \forall i \in N$$

Entonces, dado que $L_{ij} = 0\ \forall i \in B$ y $\forall j \in N \setminus B$ tenemos que, por satisfacer S (P), $S_{ij} = 0\ \forall i \in B$ y $\forall j \in N \setminus B$, y por lo tanto que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B} VN_i(S) = \sum_{i\in B} e_i + \sum_{i\in B}\sum_{j\in N} S_{ji} - \sum_{i\in B}\sum_{j\in N} S_{ij} = \sum_{i\in B} e_i + \sum_{j\in B}\sum_{i\in N} S_{ij} - \sum_{i\in B}\sum_{j\in N} S_{ij} = \\ \sum_{i\in B} e_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in B} S_{ij} - \sum_{i\in B}\sum_{j\in N} S_{ij} = \sum_{i\in B} e_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in B} S_{ij} - \sum_{i\in B}\sum_{j\in B} S_{ij} = \\ \sum_{i\in B} e_i + \sum_{i\in N\setminus B}\sum_{j\in B} S_{ij} \geq \sum_{i\in B} e_i > 0.\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad estricta es consecuencia de que B es un subsistema cerrado de (N, L, e). Finalmente obtenemos que

$$\sum_{i\in B} VN_i(S) > 0 \Longrightarrow \exists i \in B \text{ tal que } VN_i(S) > 0.$$

□

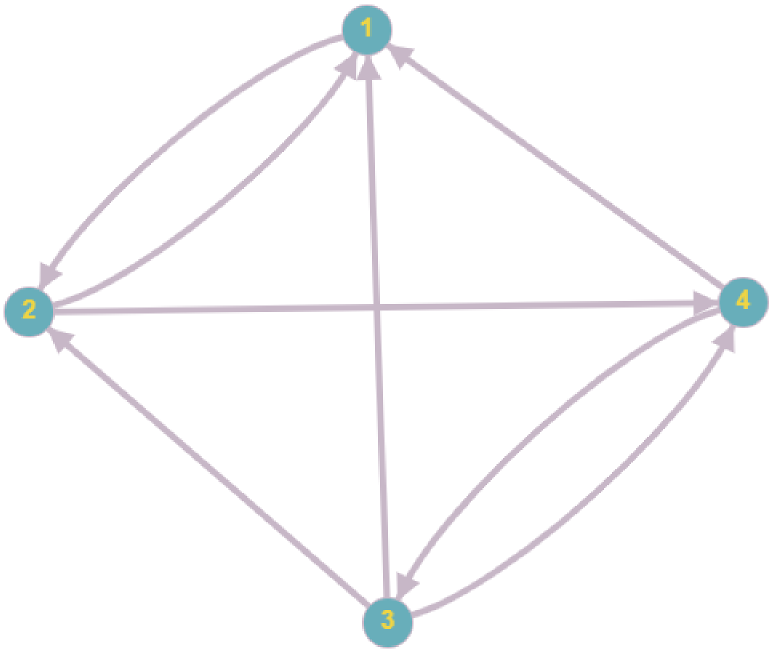
A un sistema financiero $C = (N, L, e)$ podemos asociarle un **grafo dirigido** $G_c = (V, A, \Psi)$ en que $V = N$, es decir, los vértices del grafo dirigido representan los agentes del sistema financiero, A es el conjunto de aristas del grafo dirigido y sea a_{ij} la arista cuya cola y cuya cabeza son i y j respectivamente, entonces $a_{ij} \in A \iff L_{ij} > 0$. Por consiguiente $\Psi(a_{ij}) = (i, j)$.

Dado un sistema financiero $C = (N, L, e)$ y su grafo dirigido asociado $G_c = (V, A, \Psi)$ a la órbita de un vértice cualquiera $i \in V$, $o(i)$, la llamamos **órbita de riesgo** de i. La órbita de riesgo de un vértice $i \in V$ contiene a aquellos otros vértices a los que puede afectar una quiebra de i, ya que están conectados a él a través de una cadena de obligaciones que va hasta ellos. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9. Consideremos el sistema financiero siguiente (N, L, e), donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e^T = (1, 0, 10, 3).$$

Entonces, una representación del grafo dirigido asociado a (N, L, e) sería:



Observación 4.10. Si miramos el ejemplo 4.9 podemos observar que $o(1) = \{2, 3, 4\}$ a pesar de que el agente 1 está conectado directamente únicamente al agente 2, pues de 2 podemos pasar a 4 y de 4 a 3 sin repetir vértices o aristas. Visto esto podemos observar que una quiebra de 1 afectaría a 2, e incluso podría provocar la posterior quiebra de 2. Esto a su vez podría llegar a causar la quiebra de 4 y finalmente la de 3. Si todo esto llegase a pasar, dado que todos los demás agentes tienen obligaciones con el agente 1, este, con su quiebra, habría provocado, no solo las quiebras de todos los demás agentes, sino una merma en el valor de sus activos, y por lo tanto de su valor neto, como consecuencia de la quiebra de los agentes 2, 3 y 4.

Lema 4.11. *Dado un sistema financiero $C = (N, L, e)$, el grafo asociado a C, $G_C = (V, A, \Psi)$, una solución S que satisface (P) y un agente $k \in N$ tal que $\sum_{i \in o(k)} e_i > 0$, entonces*

$$\exists i \in o(k) \quad \textit{tal que} \quad VN_i^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) > 0.$$

Demostración. Basta con ver que $o(k)$ es un subsistema cerrado y aplicar la proposición 4.8.

Si existiese $j \in o(k)$ tal que $L_{jt} > 0$ para algún $t \in N \setminus o(k)$, entonces $a_{jt} \in A(C)$. Dado que $j \in o(k)$, existe un camino simple dirigido $W = (k, ..., j)$ en (V, A, Ψ) de k a j, si tomamos este camino simple dirigido y lo concatenamos con el camino simple dirigido $Z = (j, a_{jt}, t)$ de j a t, obtendríamos el camino simple dirigido $W + Z = (k, ..., j, t)$ de k a t. Por lo tanto llegaríamos a la conclusión de que $t \in o(k)$ lo cual es absurdo ya que estábamos suponiendo que $k \in N \setminus o(k)$. Por lo tanto $\forall j \in o(k)$ y $\forall t \in N \setminus o(k)$ tenemos que $L_{jt} = 0$. Finalmente, dado que $\sum_{i \in o(k)} e_i > 0$ por hipótesis, podemos concluir que $o(k)$ es un subsistema cerrado de C. □

Definición 4.12. *Dado un sistema financiero $C = (N, L, e)$ y su grafo dirigido asociado G_C, decimos que (N, L, e) es regular si y solamente si, $\forall i \in N$, $o(i)$ es un subsistema* *cerrado.*

En un sistema financiero regular todas las órbitas de riesgo cuentan con una cantidad estrictamente positiva de efectivo para repartir entre los nodos que componen dicha órbita de riesgo. La condición de regularidad de un sistema financiero, como veremos, será suficiente para que, dadas dos soluciones S y S' que satisfacen (RL), (PD) y (P), $S(N, L, e) = S'(N, L, e)$ si (N, L, e) es regular. Llamaremos Γ_r al subconjunto de sistemas financieros regulares.

Observemos que, dado un sistema financiero regular (N, L, e), N es un subsistema cerrado. En efecto, dado que (N, L, e) es regular, $\sum_{i \in N} e_i \geq \sum_{i \in o(k)} e_i > 0$ para cualquier $k \in N$. Además, puesto que $N \setminus N = \emptyset$, se cumple de manera trivial que $L_{ij} = 0$ $\forall i \in N$ y $\forall j \in N \setminus N$.

Teorema 4.13. *(teorema de unicidad bajo la hipótesis de regularidad)*
En el dominio Γ_r *existe una única solución* $S : \Gamma_r \to \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} \mathbb{R}^{|N| \times |N|}$ *que satisface (RL), (PD) y (P).*

Demostración. Por el teorema de equivalencia es suficiente demostrar que si (N, L, e) es un sistema financiero regular, entonces la función $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tiene un único punto fijo.

Sea (N, L, e) un sistema financiero y sea

$$FIX(\Phi^{(N,L,e)}) := \left\{ v \in [0, \bar{p}(N, L, e)] : v = \Phi(v)^{(N,L,e)} \right\},$$

dado que la función $\Phi : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ es monótona, podemos aplicar el teorema de Tarski a cada retículo completo $\left\langle [0, \bar{p}(N, L, e)], \precsim_{[0,\bar{p}(N,L,e)]} \right\rangle$ y a cada función $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$, obteniendo que existen $p^-(N, L, e) = \cap_{[0,\bar{p}(N,L,e)]} FIX(\Phi^{(N,L,e)})$ y $p^+(N, L, e) = \cup_{[0,\bar{p}(N,L,e)]} FIX(\Phi^{(N,L,e)})$ y que $p^-(N, L, e)$, $p^+(N, L, e) \in FIX(\Phi^{(N,L,e)})$. Por lo tanto para demostrar que $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ tiene un único punto fijo si (N, L, e) es regular, basta con ver que $p^-(N, L, e) = p^+(N, L, e)$ $\forall (N, L, e) \in \Gamma_r$.

Si definimos las soluciones S^- y S^+ de manera que

$$S^-_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e) p^-_i(N, L, e) \quad \text{y} \quad S^+_{ij}(N, L, e) = \Pi_{ij}(N, L, e) p^+_i(N, L, e),$$

entonces, por el teorema de equivalencia, S^- y S^+ satisfacen (RL), (PD) y (P). Por lo tanto, por el teorema 4.4, dado un sistema financiero regular $C = (N, L, e)$

$$VN^C_i(S^-(C)) = VN^C_i(S^+(C)) \ \ \forall i \in N$$

es decir

$$e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j - p^-_i = e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^+_j - p^+_i. \tag{1}$$

Dado que S^- y S^+ satisfacen (RL) y (PD) tenemos, respectivamente, que

$$e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^+_j - p^+_i = e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j - p^-_i \geq 0$$

y que

$$\text{si } e_i + \sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} p^+_j - p^+_i = e_i + \sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} p^-_j - p^-_i > 0 \Longrightarrow p^+_i = p^-_i = \bar{p}_i.$$

Por definición $p^+ \gtrsim p^-$. Supongamos que existe $k \in N$ tal que $p^+_k > p^-_k$. Entonces, por (PD), debe suceder que

$$e_k + \sum_{j\in N} \Pi^T_{kj} p^+_j - p^+_k = e_k + \sum_{j\in N} \Pi^T_{kj} p^-_j - p^-_k = 0.$$

Sea G_C el grafo dirigido asociado a C. Dado que C es regular, por el lema 4.11, existe $t \in o(k)$ tal que el valor neto de t es estrictamente positivo y tal que existe un camino simple dirigido $W = (i_0, i_1, ..., i_{m-1}, i_m)$ de $i_0 = k$ a $i_m = t$ en G_C tal que todos los vértices de este, salvo i_m, tienen un valor neto nulo.

Veamos por inducción que, para $s = 0, 1, ..., m-1$, $p^+_{i_s} > p^-_{i_s}$. Por hipótesis la afirmación es cierta para $s = 0$, ya que $i_0 = k$. Supongamos que $p^+_{i_{l-1}} > p^-_{i_{l-1}}$ para un $l \leq m-1$. Entonces, dado que el valor neto de $l-1$ es nulo tenemos que

$$p^+_{i_l} = e_{i_l} + \sum_{j\in N} \Pi_{j i_l} p^+_j \quad \text{y} \quad p^-_{i_l} = e_{i_l} + \sum_{j\in N} \Pi_{j i_l} p^-_j$$

y por lo tanto que

$$p^+_{i_l} - p^-_{i_l} = \sum_{j\in N} \Pi_{j i_l}(p^+_j - p^-_j).$$

Por hipótesis de inducción $p^+_{i_{l-1}} > p^-_{i_{l-1}}$. Además, dado que en W pasamos de i_{l-1} a i_l debe existir una arista de i_{l-1} hacia i_l, por lo tanto $L_{i_{l-1} i_l} > 0$, lo cual implica que $\Pi_{i_{l-1} i_l} > 0$. Por lo tanto, dado que $p^+ \gtrsim p^-$,

$$p^+_{i_l} - p^-_{i_l} = \sum_{j\in N} \Pi_{j i_l}(p^+_j - p^-_j) \geq \Pi_{i_{l-1} i_l}(p^+_{i_{l-1}} - p^-_{i_{l-1}}) > 0.$$

Lo cual concluye con el argumento por inducción y demuestra que para $s = 0, 1, ..., m-1$, $p^+_{i_s} > p^-_{i_s}$, y en particular que $p^+_{i_{m-1}} > p^-_{i_{m-1}}$.
Observemos que

$$e_{i_m} + \sum_{j\in N} \Pi^T_{i_m j} p^+_j - p^+_{i_m} - [e_{i_m} + \sum_{j\in N} \Pi^T_{i_m j} p^-_j - p^-_{i_m}] = \sum_{j\in N} \Pi^T_{i_m j}(p^+_j - p^-_j) - (p^+_{i_m} - p^-_{i_m}).$$

Dado que el valor neto de i_m es estrictamente positivo tenemos que $p^+_{i_m} = p^-_{i_m} = \bar{p}_i$ y por lo tanto $p^+_{i_m} - p^-_{i_m} = 0$, dado que existe una arista de i_{m-1} hacia i_m tenemos que $\Pi_{i_{m-1} i_m} > 0$ y dado que $p^+_{i_{m-1}} > p^-_{i_{m-1}}$ obtenemos que

$$\sum_{j\in N} \Pi^T_{i_m j}(p^+_j - p^-_j) - (p^+_{i_m} - p^-_{i_m}) = \sum_{j\in N} \Pi^T_{i_m j}(p^+_j - p^-_j) \geq \Pi_{i_{m-1} i_m}(p^+_{i_{m-1}} - p^-_{i_{m-1}}) > 0,$$

y equivalentemente

$$e_t + \sum_{j\in N} \Pi^T_{tj} p^+_j - p^+_t > e_t + \sum_{j\in N} \Pi^T_{tj} p^-_j - p^-_t.$$

Lo cual contradice (1), demostrando que $p^+_k = p^-_k \ \forall k \in N$ y por lo tanto que $p^+ = p^-$. □

5. Caracterización de soluciones

Larry Eisenberg y Thomas H. Noe (2001) presentaron en su trabajo *Systemic Risk in Financial Systems* un algoritmo para hallar, dado un sistema financiero regular $(N, L, e) \in \Gamma_r$, el punto fijo de $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$ y, por lo tanto, para hallar soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P) restringidas al dominio de los sistemas financieros regulares. En el trabajo de Eisenberg y Noe se emplea el teorema de Karlin ([9] Teorema 8.3.2) para demostrar que el algoritmo está bien definido para sistemas financieros regulares. Nosotros presentaremos una demostración alternativa empleando el teorema 2.15.

Junto con la memoria del trabajo se mostrará un programa informático programado en el lenguaje de programación C que, dado un sistema financiero regular (N, L, e), calcula el punto fijo de $\Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}(N, L, e)] \to [0, \bar{p}(N, L, e)]$, muestra la matriz de pagos construida bajo la condición (P) a partir de este punto fijo, calcula el valor neto final de cada agente del sistema financiero y muestra el orden en el que quiebran los agentes.

Esta sección constará de dos partes. En la primera presentaremos el algoritmo diseñado por Larry Eisenberg y Thomas H. Noe y explicaremos la interpretación económica de este. En la segunda demostraremos que la condición de regularidad es suficiente para demostrar que el algoritmo está bien definido.

5.1. El algoritmo de quiebras ficticias. Definición e interpretación

Dado un sistema financiero regular (N, L, e). Sea $L(\Phi) = \{v \in [0, \bar{p}] : \Phi(v) \precsim v\}$, definimos para cada $v \in L(\Phi)$:

- el subconjunto $D(v)$ de N:

$$D(v) = \left\{ i \in N \text{ tales que } e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} v_j < \bar{p}_i \right\}.$$

  $D(v)$ está formado por aquellos agentes tales que, suponiendo que cada agente $i \in N$ paga un total de v_i repartido entre los demás proporcionalmente, tienen unos activos cuyo valor es estrictamente menor que sus obligaciones. Por lo tanto $D(v)$ es el conjunto de agentes quebrados bajo el vector v.

- la matriz diagonal $\Lambda(v) \in \mathbb{R}^{|N| \times |N|}$:

$$\Lambda(v)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \in D(v) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  Cuando, dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{|N| \times |N|}$, hacemos la multiplicación de matrices $\Lambda(v) M \Lambda(v)$ obtenemos la matriz M pero con las filas y columnas de los agentes de $N \setminus D(v)$ transformadas en filas y columnas nulas.

- la función $FF_v : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$:

$$FF_v(w) = \Lambda(v)(\Pi^T(\Lambda(v)w + (I - \Lambda(v)\bar{p})) + e) + (I - \Lambda(v))\bar{p}.$$

  Esta función, $FF_v(w)$, devuelve para cada agente i que no ha quebrado bajo el vector v, esto es, para cada $i \in N \setminus D(v)$, el pago exigido $\bar{p}_i$. En cambio, para cada agente i que si ha quebrado bajo el vector v, esto es, para cada $i \in D(v)$, devuelve los activos de i suponiendo que los agentes $j \in N$ que no han quebrado pagan $\bar{p}_j$ y que los que han quebrado pagan w_j. Por lo tanto, un punto fijo de FF_v es un vector tal que lo que cada agente paga es igual a cuanto tiene si ha quebrado bajo el vector v o cuanto debe en caso contrario. Por supuesto, suponemos que los pagos se reparten proporcionalmente. Observemos que la función FF_v es monótona.

Sea $f(v)$ el punto fijo de FF_v. El algoritmo para hallar un punto fijo de Φ consiste en, empezando por $p^0 = \bar{p}$, hallar $f(p^0)$. Una vez obtenido, definir $p^1 = f(p^0)$ y hallar $f(p^1)$ y así sucesivamente, definiendo en general $p^j = f(p^{j-1})$, pero siempre definiendo $p^0 = \bar{p}$. El algoritmo se da por finalizado en el primer paso j tal que $D(p^j) = D(p^{j-1})$ en cuyo caso p^j es un punto fijo de $\Phi : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$. Llamamos a este algoritmo **algoritmo de quiebras ficticias** y a la secuencia de vectores $p^0, p^1, ..., p^j$ **secuencia de quiebras ficticias**.

Interpretemos el algoritmo. Primero se supone que todos los agentes pagan la totalidad de sus obligaciones, es decir, que cada agente $i \in N$ paga $\bar{p}_i$. Si bajo esta suposición no hay ninguna quiebra, es decir, $D(\bar{p}) = \emptyset$ entonces el algoritmo se finaliza y el punto fijo de Φ es $\bar{p}$. Si en cambio algún agente quiebra, se halla p^1 suponiendo que ocurren estas quiebras a las que llamamos de primer orden. En este caso p^1 es el vector tal que $p_i^1 = \bar{p}_i$ si $i \in N \setminus D(\bar{p})$ y $p_i^1 = e_i + \sum_{j \in D(\bar{p})} \Pi_{ij}^T p_j^1 + \sum_{j \in N \setminus D(\bar{p})} \Pi_{ij}^T \bar{p}_j$ si $i \in D(\bar{p})$. De modo que los agentes que han quebrado bajo $\bar{p}$ pagan cuanto tienen y los que no, cuanto deben. Se vuelve a repetir el proceso pero ahora suponiendo que se paga p^1. Si no hay ninguna quiebra más entonces p^1 es el punto fijo de Φ. Si sí la hay entonces se halla p^2 suponiendo que ocurren las quiebras de primer orden y estas nuevas quiebras a las que llamamos de segundo orden. En este caso p^2 es el vector tal que $p_i^2 = \bar{p}_i$ si $i \in N \setminus D(p^1)$ y $p_i^2 = e_i + \sum_{j \in D(p^1)} \Pi_{ij}^T p_j^2 + \sum_{j \in N \setminus D(p^1)} \Pi_{ij}^T \bar{p}_j$ si $i \in D(p^1)$. Este proceso continua mientras se produzcan nuevas quiebras.

Este algoritmo nos permite, no solo hallar una solución de Φ, sino también ordenar los agentes de un sistema financiero según el riesgo de quiebra al que están sujetos, siendo los agentes que quiebran primero aquellos sujetos a un mayor riesgo.

5.2. El algoritmo de quiebras ficticias. Convergencia bajo la hipótesis de regularidad

Ahora demostraremos que la condición de regularidad es suficiente para demostrar que el algoritmo está bien definido.

Cada paso del algoritmo consiste en hallar un punto fijo. Esto es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, sea I la matriz identidad de dimensión $|N|$, si estamos en la iteración k y tenemos p^k entonces $p^{k+1} = f(p^k)$ es el vector de $[0, \bar{p}]$ tal que

$$A(p^k)p^{k+1} = b(p^k)$$

donde

- $A(p^k) := I - \Lambda(p^k)\Pi^T\Lambda(p^k)$.
- $b(p^k) := \Lambda(p^k)(\Pi^T(I - \Lambda(p^k))\bar{p} + e) + (I - \Lambda(p^k))\bar{p}$.

Para comprobar que el algoritmo de quiebras ficticias está bien definido para todo sistema financiero regular debemos demostrar que, dado un sistema financiero regular (N, L, e),

1. $\forall v \in L(\Phi)$, el sistema de ecuaciones $A(v)x = b(v)$ tiene una única solución y por lo tanto FF_v tiene un único punto fijo.

2. Sea $p^0, p^1, ..., p^k, ...$ la secuencia de quiebras ficticias, entonces $p^j \in L(\Phi)$ para $j = 0, 1, ..., k, ...$

3. El algoritmo converge a un punto fijo de Φ y lo hace en el primer paso si j tal que $D(p^j) = D(p^{j-1})$.

Además de demostrar estos resultados en el orden expuesto, demostraremos que el algoritmo converge en, como mucho, $|N|$ pasos.

Proposición 5.1. *Dado un sistema financiero (N, L, e), un punto fijo $p \in \mathbb{R}^{|N|}$ de $\Phi^{(N,L,e)}$ y un subsistema cerrado $T \subseteq N$*

$$\sum_{i \in T}(\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j - p_i) \geq 0.$$

Demostración. Si $i \in T$ es un agente tal que $\bar{p_i} = 0$, entonces $p_i = 0$, ya que $p = \Phi(p)$.

Si $i \in T$ es un agente tal que $\bar{p_i} > 0$, entonces $\sum_{j \in N} \Pi_{ij} = 1$. Dado que $i \in T$, $\Pi_{ij} = 0$ $\forall j \in N \setminus T$ y, por lo tanto $\sum_{j \in T} \Pi_{ij} = 1$. Por lo tanto

$$\sum_{i \in T}(\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j - p_i) = \sum_{j \in N} p_j \sum_{i \in T} \Pi^T_{ij} - \sum_{i \in T} p_i = \sum_{j \in T} p_j \sum_{i \in T} \Pi_{ji} + \sum_{j \in N \setminus T} p_j \sum_{i \in T} \Pi_{ji} - \sum_{j \in T} p_j =$$
$$\sum_{j \in T} p_j (\sum_{i \in T} \Pi_{ji} - 1) + \sum_{j \in N \setminus T} p_j \sum_{i \in T} \Pi_{ij}.$$

Si $j \in T$ es un agente tal que $\bar{p_j} = 0$, entonces $p_j = 0$. Si en cambio $j \in T$ es un agente tal que $\bar{p_j} > 0$, entonces $\sum_{i \in T} \Pi_{ji} = 1$. Por lo tanto

$$\sum_{j \in T} p_j (\sum_{i \in T} \Pi_{ji} - 1) = 0.$$

Demostrando que

$$\sum_{i \in T}(\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j - p_i) = \sum_{j \in N \setminus T} p_j \sum_{i \in T} \Pi_{ij} \geq 0.$$

□

Lema 5.2. *Dado un sistema financiero regular (N, L, e), un subsistema cerrado $T \subseteq N$ y $p \in L(\Phi)$,*

$$\exists i \in T \text{ tal que } \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j + e_i \geq \bar{p_i}.$$

Demostración. Si aplicamos el teorema de Tarski al retículo completo $\langle [0, \bar{p}], \precsim_{[0,\bar{p}]} \rangle$ y a la función monótona $\Phi : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$, tenemos que existe $p^- := \cap_{[0,\bar{p}]} L(\Phi)$ y que p^- es un punto fijo de Φ. Por lo tanto, por la proposición anterior

$$\sum_{i \in T}(\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j - p^-_i) \geq 0$$

y por lo tanto, por ser T un subsistema cerrado y (N, L, e) un sistema financiero regular, tenemos que $\sum_{i \in T} e_i > 0$,y por lo tanto

$$\sum_{i \in T} (\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j + e_i - p^-_i) > 0.$$

Ahora, dado que p^- es un punto fijo de Φ tenemos, por el lema 4.3, que $(\Pi p^- + e - p^-) = (\Pi^T p^- + e - \bar{p})^+$ y, en consecuencia, que

$$\sum_{i \in T} (\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j + e_i - \bar{p}_i)^+ > 0.$$

Finalmente, dado que $p \in L(\Phi)$, tenemos que $p \succsim p^-$ y por lo tanto que

$$(\Pi^T p + e - \bar{p})^+ \succsim (\Pi^T p^- + e - \bar{p})^+.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i \in T} (\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j + e_i - \bar{p}_i)^+ \geq \sum_{i \in T} (\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^-_j + e_i - \bar{p}_i)^+ > 0.$$

De modo que existe $i \in T$ tal que $(\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j + e_i - \bar{p}_i)^+ > 0$, es decir, tal que

$$\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p^j + e_i > \bar{p}_i.$$

$\square$

Teorema 5.3. *Sea (N, L, e) un sistema financiero regular y $p \in L(\Phi)$, entonces $A(p)$ es una Matriz regular y, por lo tanto, FF_p tiene un único punto fijo.*

Demostración. Para demostrar el teorema veremos que $A(p)$ es una R-matriz y, aplicando el teorema 2.15, tendremos que es regular.

Condición 1. Dado que Π^T es una matriz cuya diagonal es nula y $\Lambda(p)$ es una matriz diagonal, $\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p)$ debe tener una diagonal nula, de donde se sigue que la diagonal de $A(p) = I - \Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p)$ debe estar formada por unos.

Condición 2. Dado que, $\forall i, j \in N$,

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \dfrac{L_{ij}}{\bar{p}_i} & \text{si } \bar{p}_i > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{p}_i = 0 \end{cases}$$

tenemos que $\Pi^T_{ij} \in [0, 1]$ $\forall i, j \in N$ y dado que los elementos de la diagonal de $\Lambda(p)$ son 0 o 1, obtenemos que $\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p)_{ij} \in [0, 1]$ $\forall i, j \epsilon N$ tales que $i \neq j$. Por lo tanto

$$A(p) = I - \Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p) \in [-1, 0] \quad \forall i, j \in N \quad \text{tales que} \quad i \neq j.$$

Condición 3. Dado que $\sum_{i \in N \setminus \{j\}} \Pi_{ji} \leq 1$ $\forall j \in N$, entonces $\sum_{i \in N \setminus \{j\}} \Pi^T_{ij} \leq 1$ $\forall j \in N$. Como hacer el producto de matrices $\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p)$ transforma las filas y columnas de Π^T de los agentes no quebrados en filas y columnas nulas sin variar los demás elementos de la matriz, tenemos que

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} (\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p))_{ij} \leq \sum_{i \in N \setminus \{j\}} \Pi^T_{ij} \leq 1 \;\; \forall j \epsilon N,$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{i\in N\setminus\{j\}} A(p)_{ij} = \sum_{i\in N\setminus\{j\}} I_{ij} - \sum_{i\in N\setminus\{j\}} (\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p))_{ij} \geq -1 \ \ \forall j \in N.$$

Condición 4. Para demostrar esta propiedad representaremos la matriz $A(p)$. Supondremos que $N = \{1, 2, ..., |N|\}$ y que $N \setminus D(p) = \{1, ..., k\}$, para $k \leq |N|$. Podemos hacer esto sin perdida de generalidad ya que, de no suceder, podríamos reordenar a los agentes. Como el producto $\Lambda(p)\Pi^T\Lambda(p)$ transforma las filas y columnas de Π^T de los agentes de $N \setminus D(p)$ en filas y columnas nulas, tenemos que

$$A(p) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & 0 & 1 & -\Pi^T_{k+1,k+2} & \cdots & \cdots & -\Pi^T_{k+1,n} \\
\vdots & & \vdots & -\Pi^T_{k+2,k+1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -\Pi^T_{n-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & -\Pi^T_{n,k+1} & \cdots & \cdots & -\Pi^T_{n,n-1} & 1
\end{pmatrix}$$

Si tomamos un subconjunto de índices $I \subseteq N$ tal que $I \cap \{1, ..., k\} \neq \emptyset$, entonces

$$\sum_{i\in I\setminus\{j\}} A(p)[I;I]_{ij} = 0 \ \ \forall j \in I \cap \{1, ..., k\}.$$

Demostrando que en este caso existe $j \in I$ tal que

$$\sum_{i\in I\setminus\{j\}} A(p)[I;I]_{ij} > -1.$$

Supongamos que existe un subconjunto $I \subseteq N$ tal que $I \cap \{1, ..., k\} = \emptyset$ y, por lo tanto, tal que $I \subseteq D(p)$ cumpliendo que

$$\sum_{i\in I\setminus\{j\}} A(p)[I;I]_{ij} \leq -1 \ \ \forall j \in I. \tag{1}$$

Dado que

$$-1 \geq \sum_{i\in I\setminus\{j\}} A(p)[I;I]_{ij} \geq \sum_{i\in N\setminus\{j\}} A(p)_{ij} \geq -1,$$

debe suceder que

$$\sum_{i\in I\setminus\{j\}} A(p)[I;I]_{ij} = -1.$$

Esto implica que

$$-\sum_{i\in I\setminus\{j\}} \Pi^T_{ij} = -1.$$

Sin embargo, esto significa que los agentes de I solo tienen obligaciones entre ellos, ya que si $\exists r \in I$ tal que $-\Pi_{rt} = -\Pi^T_{tr} < 0$ para algún $t \in N \setminus I$ entonces tendríamos que

$$-1 = -\sum_{i \in I \setminus \{r\}} \Pi^T_{ir} < -\sum_{i \in I \setminus \{r\}} \Pi^T_{ir} - \Pi^T_{tr} \leq -\sum_{i \in N \setminus \{j\}} \Pi^T_{ir} \leq -1$$

y llegaríamos a una conclusión absurda. Dado que (N, L, e) es regular y, dado que I es un subconjunto formado por agentes que solo tiene obligaciones entre ellos, debe suceder que $\sum_{i \in I} e_i > 0$ y por lo tanto I es un subsistema cerrado de (N, L, e). Dado que $I \subsetneq D(p)$ tenemos que

$$e_i + \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} p_j < \bar{p}_i \ \ \forall i \in I. \tag{2}$$

Sin embargo esto contradice el lema 5.2 ya que, como hemos visto, I es un subsistema cerrado. Por lo tanto (1) debe ser falsa, demostrando que $A(p)$ satisface la condición 4 de una R-matriz. □

Lema 5.4. *Sea (N, L, e) un sistema financiero y sean $p, p' \in L(\Phi)$ tales que $p \precsim p'$, entonces $D(p') \subseteq D(p)$.*

Demostración. En efecto, si $i \in D(p')$, entonces $(\Pi^T p' + e)_i < \bar{p}_i$. Ahora, dado que $p \precsim p'$, $(\Pi^T p + e) \leq (\Pi^T p' + e)$, de modo que $(\Pi^T p + e)_i \leq (\Pi^T p' + e)_i < \bar{p}_i$ demostrando que $i \epsilon D(p)$. □

Teorema 5.5. *Dado un sistema financiero regular (N, L, e) y sea $\{p^0, p^1, ..., p^j, ...\}$ la secuencia de quiebras ficticias obtenida mediante el algoritmo de quiebras ficticias, entonces:*

- $p^k \precsim p^{k-1}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., j, ...\}$.
- $p^k \in L(\Phi)$ $\forall k \in \{0, 1, ..., j, ...\}$.

Demostración. Demostraremos este resultado por inducción sobre k.

Dado que $\Phi : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$, $\Phi(\bar{p}) \precsim \bar{p}$ por lo que $p^0 \in L(\Phi)$.

Observemos que $FF_{\bar{p}} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$. En efecto, si $i \in N \setminus D(\bar{p})$, entonces $FF_{\bar{p}}(\bar{p})_i = \bar{p}_i$. Si $i \in D(\bar{p})$, entonces $FF_{\bar{p}}(\bar{p})_i = \sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} \bar{p}_j + e_i$. Dado que $i \in D(\bar{p})$, $\sum_{j \in N} \Pi^T_{ij} \bar{p}_j + e_i < \bar{p}_i$. Por lo tanto $FF_{\bar{p}}(\bar{p}) \precsim \bar{p}$, como además $FF_{\bar{p}}(p) \succsim 0$ si $p \succsim 0$ y dado que la función $FF_{\bar{p}}$ es monótona, tenemos que $FF_{\bar{p}} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$.

Sea $L(FF_{\bar{p}}) = \{v \in [0, \bar{p}] : FF_{\bar{p}}(v) \precsim v\}$ y sea $FIX(FF_{\bar{p}}) = \{v \in [0, \bar{p}] : FF_{\bar{p}}(v) = v\}$. Por definición $p^1 := FF_{\bar{p}}(p^1)$ y además sabemos, por el teorema 5.3, que p^1 es el único punto fijo de $FF_{\bar{p}}$. Como acabamos de ver $FF_{\bar{p}} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$ es una aplicación monótona, y por lo tanto, puesto que $\langle [0, \bar{p}], \succsim_{[0,\bar{p}]} \rangle$ es un retículo completo, podemos aplicar el teorema de Tarski sobre este retículo y sobre $FF_{\bar{p}} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$. Por la primera afirmación del teorema $\cap_{[0,\bar{p}]} FIX(FF_{\bar{p}}) = \cap_{[0,\bar{p}]} L(FF_{\bar{p}})$ y por lo tanto, dado que $FIX(FF_{\bar{p}}) = \{p^1\}$ y dado que $\bar{p} \in L(FF_{\bar{p}})$, tenemos que $p^1 \precsim \bar{p} = p^0$.

Veamos que $\Phi(p^1) \precsim FF_{\bar{p}}(p^1)$.
Si $i \in D(\bar{p})$, entonces

$$\Phi(p^1)_i = \text{mín}\left\{\sum_{j\in N} \Pi^T_{ij} p^1_j + e_i, \bar{p}_i\right\} \leq \text{mín}\left\{\sum_{j\in D(\bar{p})} \Pi^T_{ij} p^1_j + \sum_{j\in N\setminus D(\bar{p})} \Pi^T_{ij} \bar{p}_j + e_i, \bar{p}_i\right\} \leq$$
$$\sum_{j\in D(\bar{p})} \Pi^T_{ij} p^1_j + \sum_{j\in N\setminus D(\bar{p})} \Pi^T_{ij} \bar{p}_j + e_i) = FF_{\bar{p}}(p^1).$$

Si $i \in N \setminus D(\bar{p})$, entonces

$$\Phi(p^1)_i \leq \bar{p}_i = FF_{\bar{p}}(p^1)_i.$$

Por lo que $\Phi(p^1) \precsim FF_{\bar{p}}(p^1)$ y por lo tanto, dado que $p^1 := FF_{\bar{p}}(p^1)$, tenemos que $\Phi(p^1) \precsim p^1$, demostrando que $p^1 \in L(\Phi)$.

Hemos demostrado que $p^0, p^1 \in L(\Phi)$ y que $p^1 \precsim p^0$. Nuestra *hipótesis de inducción* será que $p^k \in L(\Phi)$ y que $p^k \precsim p^{k-1}$. Demostraremos que $p^{k+1} \in L(\Phi)$ y que $p^{k+1} \precsim p^k$.

Bajo la hipótesis de inducción podemos demostrar que $\Lambda(p^k)p^k + (I - \Lambda(p^k))\bar{p} = p^k$. En efecto, si $i \in D(p^k)$ entonces $(\Lambda(p^k)p^k + (I - \Lambda(p^k))\bar{p})_i = p^k_i$. Si $i \in N \setminus D(p^k)$, dado que $p^k \precsim p^{k-1}$ tenemos, por el lema 5.4, que $D(p^{k-1}) \subseteq D(p^k)$ y por lo tanto que $N \setminus D(p^k) \subseteq N \setminus D(p^{k-1})$, de modo que $i \in N \setminus D(p^{k-1})$. Por definición, $p^k := FF_{p^{k-1}}(p^k)$, de modo que $p^k_i = FF_{p^{k-1}}(p^k)_i = \bar{p}_i$, ya que $i \in N \setminus D(p^{k-1})$. Por lo que $(\Lambda(p^k)p^k + (I - \Lambda(p^k))\bar{p})_i = \bar{p}_i = p^k_i$. Demostrando que

$$\Lambda(p^k)p^k + (I - \Lambda(p^k))\bar{p} = p^k. \tag{1}$$

Demostremos ahora que $\Phi(p^k) = FF_{p^k}(p^k)$. Por la identidad (1)

$$FF_{p^k}(p^k) = \Lambda(p^k)(\Pi^T p^k + e) + (I - \Lambda(p^k))\bar{p}.$$

De modo que si $i \in D(p^k)$, entonces $FF_{p^k}(p^k)_i = (\Pi^T p^k + e)_i$. Dado que $i \in D(p^k)$, $(\Pi^T p^k + e)_i < \bar{p}_i$, por lo que $\Phi(p^k)_i = (\Pi^T p^k + e)_i$. Demostrando que $FF_{p^k}(p^k)_i = \Phi(p^k)_i$ si $i \in D(p^k)$. Si $i \in N \setminus D(p^k)$ entonces $FF_{p^k}(p^k)_i = \bar{p}_i$ y $(\Pi^T p^k + e)_i \geq \bar{p}_i$, por lo que $\Phi(p^k)_i = \bar{p}_i$. Demostrando que $FF_{p^k}(p^k)_i = \Phi(p^k)_i$ si $i \in N \setminus D(p^k)$. Por lo tanto

$$\Phi(p^k) = FF_{p^k}(p^k). \tag{2}$$

Sea $L(FF_{p^k}) = \{v \in [0, \bar{p}] : FF_{p^k}(v) \precsim v\}$ y sea $FIX(FF_{p^k}) = \{v \in [0, \bar{p}] : FF_{p^k}(v) = v\}$. Por la hipótesis de inducción $p^k \in L(\Phi)$, es decir, $\Phi(p^k) \precsim p^k$, lo cual implica, junto con (2), que $FF_{p^k}(p^k) \precsim p^k$, de modo que $p^k \in L(FF_{p^k})$. Dado que $FF_{p^k} : [0, p^k] \to [0, p^k]$ es monótona, podemos aplicar el teorema de Tarski al retículo completo $\langle [0, \bar{p}], \precsim_{[0,\bar{p}]} \rangle$ y a la función monótona $FF_{p^k} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$, obteniendo que $\cup_{[0,\bar{p}]} FIX(FF_{p^k}) = \cup_{[0,\bar{p}]} L(FF_{p^k})$. Dado que $FIX(FF_{p^k}) = \{p^{k+1}\}$ por el teorema 5.3 y dado que $p^k \in L(FF_{p^k})$ obtenemos que $p^{k+1} \precsim p^k$. Demostrando la primera parte del teorema.

Para demostrar que $p^{k+1} \in L(\Phi)$ demostraremos que $\Phi(p^{k+1}) \precsim FF_{p^k}(p^{k+1})$.

Si $i \in D(p^k)$, y por lo tanto $(\Pi^T p^{k+1} + e)_i < \bar{p}_i$, entonces

$$FF_{p^k}(p^{k+1})_i = \sum_{j\in D(p^k)} \Pi^T_{ij} p^{k+1}_j + \sum_{j\in N\setminus D(p^k)} \Pi^T_{ij} \bar{p}_j + e_i.$$

Dado que $\Phi(p^{k+1})_i = (\Pi^T p^{k+1} + e)_i$

$$\Phi(p^{k+1})_i = \sum_{j\in N} \Pi_{ij}^T p_j^{k+1} + e_i \leq \sum_{j\in D(p^k)} \Pi_{ij}^T p_j^{k+1} + \sum_{j\in N\setminus D(p^k)} \Pi_{ij}^T \bar{p}_j + e_i = FF_{p^k}(p^{k+1})_i$$

ya que como consecuencia del primer resultado del teorema $p^{k+1} \precsim p^k \precsim \cdots \precsim p^0 = \bar{p}$.

Si $i \in N \setminus D(p^k)$ entonces $FF_{p^k}(p^{k+1})_i = \bar{p_i}$. Si además $i \in N \setminus D(p^{k+1})$, entonces $(\Pi^T p^{k+1} + e)_i \geq \bar{p_i}$ y por lo tanto $\Phi(p^{k+1})_i = \bar{p_i}$. Si en cambio $i \in D(p^{k+1})$, entonces $(\Pi^T p^{k+1} + e)_i < \bar{p_i}$ por lo que $\Phi(p^{k+1})_i = (\Pi^T p^{k+1} + e)_i < \bar{p_i} = FF_{p^k}(p^{k+1})_i$. En cualquier caso $\Phi(p^{k+1})_i \leq FF_{p^k}(p^{k+1})_i$ de modo que $\Phi(p^{k+1}) \precsim FF_{p^k}(p^{k+1})$ y por lo tanto, dado que $FF_{p^k}(p^{k+1}) := p^{k+1}$, $\Phi(p^{k+1}) \precsim p^{k+1}$. Demostrando que $p^{k+1} \in L(\Phi)$. □

Teorema 5.6. *Sea (N, L, e) un sistema financiero regular y sea $\{p^0, p^1, ..., p^j, ...\}$ la secuencia de quiebras ficticias obtenida mediante el algoritmo de quiebras ficticias, entonces $\{p^0, p^1, ..., p^j, ...\}$ converge a un punto fijo de Φ, converge en un máximo de $|N|$ pasos y lo hace en el primer paso $k \leq |N|$ tal que $D(p^k) = D(p^{k-1})$.*

Demostración. Veamos que si $k \in \{0, 1, ..., j, ...\}$ satisface que $D(p^k) = D(p^{k-1})$, entonces $\Phi(p^k) = FF_{p^{k-1}}(p^k)$.

En efecto, si $i \in D(p^k) = D(p^{k-1})$ entonces

$$FF_{p^{k-1}}(p^k)_i = \sum_{i\in D(p^{k-1})} \Pi_{ij}^T p_j^k + \sum_{j\in N\setminus D(p^{k-1})} \Pi_{ij}^T \bar{p}_j + e_i \quad \text{y} \quad \Phi(p^k)_i = \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}^T p_j^k + e_i.$$

$p^k := FF_{p^{k-1}}(p^k)$ por lo tanto $p_j^k = \bar{p}_j \ \forall j \in N \setminus D(p^{k-1})$. De modo que

$$\sum_{j\in N\setminus D(p^{k-1})} \Pi_{ij}^T \bar{p}_j = \sum_{j\in N\setminus D(p^{k-1})} \Pi_{ij}^T p_j^k$$

y por lo tanto

$$\Phi(p^k)_i = FF_{p^{k-1}}(p^k)_i \ \ \forall i \epsilon D(p^{k-1}).$$

Si $i \in N \setminus D(p^k) = N \setminus D(p^{k-1})$ entonces $FF_{p^{k-1}}(p^k)_i = \bar{p_i}$. Dado que $i \in N \setminus D(p^k)$, $(\Pi^T p^k + e)_i \geq \bar{p_i}$ y por lo tanto $\Phi(p^k)_i = \bar{p_i}$. Demostrando que

$$FF_{p^{k-1}}(p^k)_i = \bar{p_i} = \Phi(p^k)_i \ \ \forall i \in N \setminus D(p^k).$$

Esto demuestra que $\Phi(p^k) = FF_{p^{k-1}}(p^k)$, y por lo tanto, dado que $FF_{p^{k-1}}(p^k) := p^k$, que $\Phi(p^k) = p^k$ es decir, que p^k es un punto fijo de Φ.

Hemos demostrado que el algoritmo converge a un punto fijo de Φ en el primer paso k tal que $D(p^k) = D(p^{k-1})$. Por el teorema 5.5 la secuencia de quiebras ficticias satisface que

$$p^0 \succsim p^1 \succsim \cdots \succsim p^j \succsim \cdots$$

y por el lema 5.4 obtenemos que

$$D(p^0) \subseteq D(p^1) \subseteq \cdots \subseteq D(p^j) \subseteq \cdots$$

Por lo tanto, el algoritmo no converge en el paso j solamente si $D(p^{j-1}) \subsetneq D(p^j)$. Sin embargo el sistema financiero está integrado por $|N|$ agentes, de modo que esto solamente puede pasar un máximo de $|N|$ veces, demostrando que el algoritmo de quiebras ficticias converge en como máximo $|N|$ pasos. □

6. No manipulabilidad por fusión o escisión

M. Ángeles de Frutos (1999), en su artículo *Coalitional manipulations in a bankrupcy problem*, estudia en sistemas financieros simples en riesgo, es decir, en aquellos sistemas financieros en los que solo hay un deudor, el cual es incapaz de satisfacer todas sus deudas, y múltiples acreedores, por una parte aquellas condiciones que no incentivan a los acreedores a juntar las deudas que el agente que quiebra tiene con ellos y actuar como un único agente, lo que nosotros llamaremos **no manipulabilidad por fusión (NMF)**, y por otra aquellas condiciones que no incentivan a los acreedores a dividir o partir las deudas que el agente que quiebra tiene con ellos y actuar como varios agentes, lo que nosotros llamaremos **no manipulabilidad por escisión (NME)**. De Frutos demuestra un importante resultado, que en sistemas financieros simples la condición de proporcionalidad es equivalente a las condiciones de no manipulabilidad por fusión y no manipulabilidad por escisión.

En esta sección extenderemos la idea de no manipulabilidad por fusión o escisión a sistemas financieros complejos y la estudiaremos bajo las condiciones (RL), (PD) y (P). Como veremos, estas tres condiciones son compatibles con (NMF), sin embargo no lo son con (NME).

Definición 6.1. *Decimos que una solución S satisface la condición de* ***no manipulabilidad por fusión*** *si para todo par de sistemas financiero $(N, L, e), (N', L', e') \in \Gamma$ tales que $N' \subsetneq N$ y tales que $\exists m \in N'$ que cumple*

- $e'_m = e_m + \sum_{k \in N \setminus N'} e_k$,
- $L'_{mj} = L_{mj} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{kj}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,
- $L'_{jm} = L_{jm} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{jk}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,

mientras que $\forall i, j \in N' \setminus \{m\}$, $L'_{ij} = L_{ij}$ y $e'_i = e_i$. Se cumple que

$$VN_m^{(N',L',e')}(S(N', L', e')) \leq VN_m^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) + \sum_{k \in N \setminus N'} VN_k^{(N,L,e)}(S(N, L, e)).$$

Decimos que una solución satisface (NMF) si, dado un sistema financiero, ningún grupo de agentes tiene incentivos a comportarse como un único agente, juntando las deudas que tienen con los demás, las que los demás tienen con ellos y su efectivo, pero cancelando también las deudas que los agentes que se han fusionado tienen entre ellos.

Definición 6.2. *Decimos que una solución S satisface la condición de* ***no manipulabilidad por escisión*** *si para todo par de sistemas financiero $(N, L, e), (N', L', e') \in \Gamma$ tales que $N' \subsetneq N$ y tales que $\exists m \in N'$ que cumple*

- $e'_m = e_m + \sum_{k \in N \setminus N'} e_k$,
- $L'_{mj} = L_{mj} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{kj}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,
- $L'_{jm} = L_{jm} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{jk}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,

mientras que $\forall i, j \in N' \setminus \{m\}$, $L'_{ij} = L_{ij}$ y $e'_i = e_i$ y, $\forall i, j \in (N \setminus N') \cup \{m\}$, $L_{ij} = 0$. Se cumple que

$$VN_m^{(N',L',e')}(S(N', L', e')) \geq VN_m^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) + \sum_{k \in N \setminus N'} VN_k^{(N,L,e)}(S(N, L, e)).$$

Decimos que una solución satisface (NME) si, dado un sistema financiero, ningún agente tiene incentivos a partir las deudas que tiene con los demás, las que los demás tienen con él y el efectivo que posee, comportándose como múltiples agentes. Una condición que exigimos a los agentes a la hora de escindirse es que los nuevos agentes no pueden contraer nuevas deudas entre ellos.

Teorema 6.3. *Si una solución satisface (RL), (PD) y (P) entonces satisface (NMF). Por lo tanto (RL), (PD), (P) y (NMF) son compatibles.*

Demostración. Demostraremos este teorema por reducción al absurdo. Supongamos que el enunciado del teorema es falso y por lo tanto que existe una solución S que satisface (RL), (PD) y (P) tal que existe un par de sistemas financieros $(N, L, e), (N', L', e') \in \Gamma$ tales que $N' \subsetneq N$ y tales que $\exists m \in N'$ que cumple

- $e'_m = e_m + \sum_{k \in N \setminus N'} e_k$,
- $L'_{mj} = L_{mj} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{kj}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,
- $L'_{jm} = L_{jm} + \sum_{k \in N \setminus N'} L_{jk}$, $\forall j \in N' \setminus \{m\}$,

mientras que $\forall i, j \in N' \setminus \{m\}$, $L'_{ij} = L_{ij}$ y $e'_i = e_i$. Que satisfacen que

$$VN_m^{(N',L',e')}(S(N', L', e')) > VN_m^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) + \sum_{k \in N \setminus N'} VN_k^{(N,L,e)}(S(N, L, e)). \quad (1)$$

Para aligerar la notación definimos: $S = S(N, L, e)$, $S' = S(N', L', e')$, $\Pi = \Pi(N, L, e)$, $\Pi' = \Pi(N', L', e')$, $p = p(S(N, L, e))$, $p' = p(S(N', L', e'))$, $\bar{p} = \bar{p}(N, L, e)$, $\bar{p}' = \bar{p}(N', L', e')$, $\Phi = \Phi^{(N,L,e)} : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$ y $\Phi' = \Phi^{(N',L',e')} : [0, \bar{p}'] \to [0, \bar{p}']$. Supondremos también que $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$, donde $n = |N|$, que $N' = \{1, 2, 3, ..., m\}$, donde $m = |N'|$ y que m es el agente en el que se fusionan $\{m, m+1, ..., n\}$. Podemos suponer todo esto sin problema ya que, en caso de no suceder, podríamos renombrar y reordenar los agentes de ambos sistemas financieros. Entonces, dado que S satisface (P), las desigualdades (1) y (2) son equivalentes

$$(\Pi'^T p' + e' - \bar{p}')_m^+ > \sum_{k=m}^{n} (\Pi^T p + e - \bar{p})_k^+. \quad (2)$$

Por el teorema de equivalencia p y p' son puntos fijos de Φ y Φ' respectivamente. Sea $FIX(\Phi) := \{v \in [0, \bar{p}] : v = \Phi(v)\}$, si aplicamos el teorema de Tarski al retículo completo $\left\langle [0, \bar{p}], \succsim_{[0,\bar{p}]} \right\rangle$ y a la función monótona Φ obtenemos que $p^- := \cap_{[0,\bar{p}]} FIX(\Phi) \in FIX(\Phi)$. Por el teorema 4.4 el valor neto de los agentes de (N, L, e) es invariante por soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P), de modo que, por el teorema de equivalencia, obtenemos que

$$\sum_{k=m}^{n} (\Pi^T p + e - \bar{p})_k^+ = \sum_{k=m}^{n} (\Pi^T p^- + e - \bar{p})_k^+$$

y, por lo tanto

$$(\Pi'^T p' + e' - \bar{p}')_m^+ > \sum_{k=m}^{n} (\Pi^T p^- + e - \bar{p})_k^+. \quad (3)$$

Así pues, podemos suponer que $p = p^-$.

Dado que S satisface (RL) tenemos que $\sum_{k=m}^{n} VN_k^{(N,L,e)}(S) \geq 0$ y por lo tanto, por (1), tenemos que

$$VN_m^{(N',L',e')}(S') > 0, \tag{4}$$

lo cual implica, dado que S satisface (PD), que m ha satisfecho todas sus obligaciones en (N', L', e').

Sea $q \in \mathbb{R}^{|N|}$ el siguiente vector

$$q_k := \begin{cases} p'_k & \text{si } k \in \{1, 2, ..., m-1\} \\ \bar{p}_k & \text{si } k \in \{m, m+1, ..., n\} \end{cases}$$

y sea $L(\Phi) = \{v \in [0, \bar{p}] : \Phi(v) \precsim v\}$. Demostremos que $q \in L(\Phi)$.

Si $k \in \{m, m+1, ..., n\}$, entonces, dado que $q_k = \bar{p}_k$, es evidente que $\Phi(q)_k \leq q_k$.

Si $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(q)_k &= \text{mín}\left\{\sum_{j\in N} \Pi_{kj}^T q_j + e_k, \bar{p}_k\right\} \\
(a) &= \text{mín}\left\{\sum_{j=1}^{m-1} \Pi_{kj}^T p'_j + \sum_{j=m}^{n} \Pi_{kj}^T \bar{p}_j + e_k, \bar{p}_k\right\} \\
(b) &= \text{mín}\left\{\sum_{j=1}^{m-1} \Pi'^T_{kj} p'_j + \sum_{j=m}^{n} L_{jk} + e_k, \bar{p}_k\right\} \\
(c) &= \text{mín}\left\{\sum_{j=1}^{m-1} \Pi'^T_{kj} p'_j + S'_{mk} + e_k, \bar{p}_k\right\} \\
(d) &= \text{mín}\left\{\sum_{j=1}^{m} \Pi'^T_{kj} p'_j + e_k, \bar{p}_k\right\} \\
&= \text{mín}\left\{\sum_{j\in N'} \Pi'^T_{kj} p'_j + e'_k, \bar{p}'_k\right\} = \Phi'(p')_k := p'_k = q_k.
\end{aligned}$$

Donde (a) es consecuencia directa de la definición de q. (b) es consecuencia, por una parte, de que, $\forall j, k \in \{1, 2, ..., m-1\}$, $L_{jk} = L'_{jk}$ y $\bar{p}_j = \bar{p}'_j$ y por lo tanto $\Pi_{kj}^T = \Pi'^T_{kj}$, y por otra parte de que $\Pi_{kj}^T = \dfrac{L_{jk}}{\bar{p}_j}$, $\forall k, j \in N$. (c) se deduce del hecho de que $\sum_{j=m}^{n} L_{jk} = L'_{mk}$ y, dado que hemos visto que m paga todas sus deudas en (N', L', e'), tenemos, por (P), que $S'_{mk} = L'_{mk}$. Finalmente (d) se deduce de que, por satisfacer S la propiedad (P), entonces $S'_{mk} = \Pi'^T_{km} p'_m$.

Por lo tanto $q \in L(\Phi)$.

Si aplicamos el teorema de Tarski al retículo completo $\left\langle [0, \bar{p}], \succsim_{[0,\bar{p}]} \right\rangle$ y a la función monótona $\Phi : [0, \bar{p}] \to [0, \bar{p}]$ obtenemos, dado que $p = p^-$ y dado que $q \in L(\Phi)$, que $p \precsim q$. En particular obtenemos que, $\forall k \in \{1, 2, ..., m-1\}$, $p_k \leq p'_k$, ya que $q_k = p'_k$. Veamos que esto implica que, $\forall k \in \{1, 2, ..., m-1\}$,

$$VN_k^{(N,L,e)}(S) \leq VN_k^{(N',L',e')}(S'). \tag{5}$$

Si k es un agente tal que $p_k < p'_k \leq \bar{p}'_k = \bar{p}_k$, entonces, dado que S satisface (PD) y (RL), tenemos que $VN_k^{(N,L,e)}(S) = 0$ y por lo tanto, que

$$0 = VN_k^{(N,L,e)}(S) \leq VN_k^{(N',L',e')}(S').$$

Si k es un agente tal que $p_k = p'_k < \bar{p}'_k = \bar{p}_k$, entonces, dado que S satisface (PD) y (RL) tenemos que

$$0 = VN_k^{(N,L,e)}(S) = VN_k^{(N',L',e')}(S').$$

Si k es un agente tal que $p_k = p'_k = \bar{p}'_k = \bar{p}_k$, entonces

$$\begin{aligned}
VN_k^{(N,L,e)}(S) &= \text{máx}\left\{\sum_{j\in N}\Pi^T_{kj}p_j + e_k - \bar{p}_k, 0\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\Pi^T_{kj}p_j + \sum_{j=m}^{n}\Pi^T_{kj}p_j + e_k - \bar{p}_k, 0\right\} \\
(e) &= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\Pi'^T_{kj}p_j + \sum_{j=m}^{n}\Pi^T_{kj}p_j + e'_k - \bar{p}'_k, 0\right\} \\
(f) &\leq \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\Pi'^T_{kj}p'_j + \sum_{j=m}^{n}L_{jk} + e'_k - \bar{p}'_k, 0\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\Pi'^T_{kj}p'_j + L'_{mk} + e'_k - \bar{p}'_k, 0\right\} \\
(g) &= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\Pi'^T_{kj}p'_j + \Pi'^T_{km}p'_m + e'_k - \bar{p}'_k, 0\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sum_{j\in N'}\Pi'^T_{kj}p'_j + e'_k - \bar{p}'_k, 0\right\} = VN_k^{(N',L',e')}(S').
\end{aligned}$$

Donde en (e) hemos hecho el mismo razonamiento que en (b). En (f) hemos empleado que $p_j \leq p'_j$ $\forall j \in \{1, 2, ..., m-1\}$ y que $\Pi^T_{kj}p_j \leq L_{jk}$, $\forall k, j \in N$. En (g) que, por satisfacer S la propiedad (P), $L'_{mk} = \Pi'_{mk}p'_m$.

Por lo tanto hemos demostrado (5).

De (5) se deduce que

$$\sum_{k=1}^{m-1} VN_k^{(N,L,e)}(S) \leq \sum_{k=1}^{m-1} VN_k^{(N',L',e')}(S'). \tag{6}$$

Ahora bien, dado que

$$\sum_{k=1}^{n} VN_k^{(N,L,e)}(S) = \sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{m} e'_k = \sum_{k=1}^{m} VN_k^{(N',L',e')}(S')$$

tenemos que (6) es cierto si y solamente si

$$VN_m^{(N',L',e')}(S') \leq \sum_{k=m}^{n} VN_k^{(N,L,e)}(S), \tag{7}$$

pero esto contradice (1), lo cual concluye la demostración del teorema. $\square$

Este teorema demuestra no solo que (RL), (PD), (P) y (NMF) son compatibles, sino que satisfacer (RL), (PD) y (P) es una condición suficiente para que una solución satisfaga (NMF).

A continuación mostramos con un contraejemplo que (RL), (PD), (P) y (NME) no son compatibles en general.

Ejemplo 6.4. Sea S una solución que satisface (RL), (PD) y (P). Dado el siguiente sistema financiero (N, L, e) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^T = (2, 2, 2)$$

obtenemos mediante el algoritmo de quiebras ficticias

$$S(N, L, e) = \begin{pmatrix} 0 & 9,9131 & 3,3044 \\ 6 & 0 & 6 \\ 5,1999 & 6,1043 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$VN_1^{(N,L,e)}(S) = 0, \;\; VN_2^{(N,L,e)}(S) = 6 \;\text{ y }\; VN_3^{(N,L,e)}(S) = 0.$$

Supongamos ahora que el agente 3 se subdivide en 2 partes de manera que nos queda el sistema financiero (N', L', e') tal que $N' = \{1, 2, 3, 4\}$ y tal que

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e'^T = (2, 2, 2, 0).$$

Los agentes 1 y 2 de (N', L', e') corresponden a los agentes 1 y 2 de (N, L, e) y los agentes 3 y 4 de (N', L', e') corresponden al agentes 3 de (N, L, e). Observemos que el agente 3 ha refugiado todos sus activos en una de sus nuevas entidades y ha traspasado todas sus deudas a la otra. Como veremos a continuación, por la propiedad de (RL), esta estrategia exime al agente 3 del pago de sus deudas, lo que le permite mejorar su valor neto. Ahora por el algoritmo

$$S(N', L', e') = \begin{pmatrix} 0 & 3,6 & 1,2 & 0 \\ 2,8 & 0 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$6 = VN_3^{(N',L',e')}(S(N', L', e')) + VN_4^{(N',L',e')}(S(N', L', e')) > VN_3^{(N,L,e)}(S(N, L, e)) = 0.$$

Lo cual demuestra que S no satisface (NME).

Visto este ejemplo, dado que el valor neto de los agentes de un sistema financiero es invariante para soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P), podemos afirmar que (RL), (PD) y (P) son incompatibles con (NME).

7. Conclusiones

En este trabajo nos hemos centrado en explicar el trabajo de Eisenberg i Noe (2001) de forma axiomática. Esto nos ha permitido extender algunos resultados e interpretarlos en un contexto más general. Hemos visto que las condiciones (RL), (PD) y (P) son compatibles y que el valor neto de los agentes de un sistema financiero es invariante para estas soluciones, hemos dado condiciones suficientes para garantizar la unicidad de soluciones, hemos interpretado y demostrado que el algoritmo ofrecido por Eisenberg i Noe está bien definido para sistemas financieros regulares y por último hemos podido extender los resultados de de Frutos (1999) de sistemas financieros simples a sistemas financieros complejos viendo que (RL), (PD), (P) y (NMF) son compatibles y que (RL), (PD), (P) y (NME) no lo son. Estos dos últimos resultados han sido los más difíciles de demostrar. Podemos decir que, especialmente en estos casos, pero también para el resto de los resultados, ha sido esencial comprender la intuición económica tras este trabajo. No menos importante ha sido el teorema de Tarski que ha resultado ser una herramienta esencial para demostrar los resultados mas importantes de las secciones 4, 5 y 6.

En relación con lo que hemos visto, quedan algunas interesantes preguntas por responder. Hemos demostrado que (RL), (PD), (P) y (NMF), pero son equivalentes (RL), (PD) y (P), y (RL), (PD) y (NMF)? Y, en caso de no serlo, que diferencia hay entre las soluciones que satisfacen (RL), (PD) y (P) y las que satisfacen (RL), (PD) y (NMF)?

En otros trabajos se estudian otro tipo de soluciones, como aquellas que satisfacen las condiciones de igualitarismo en perdidas e igualitarismo en ganancias. Sin embargo, estos estudios no están estructurados de manera axiomática, creemos por lo tanto, que sería interesante trasladar la misma tarea que hemos hecho en este trabajo a estos estudios.

Referencias

[1] Larry Eisenberg and Thomas H. Noe. *Systemic Risk in Financial Systems*. Management Science 47(2): 236-249, 2001.
https://doi.org/10.1287/mnsc.47.2.236.9853

[2] Barry O'Neill. *A Problem of Rights Arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, 345-371, 1982.

[3] Robert J. Aunmann and Michael Maschler. *Game Theoretic Analysis of a Bankrupcy Problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory 36, 195-213, 1985.

[4] M. Angeles de Frutos. *Coalitional manipulations in a bankruptcy problem*. Review of Economic Design 4, 255-272, 1999.

[5] William Thomson. *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*. Mathematical Social Sciences 45, 249-297, 2003.

[6] Alfred Tarski. *A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics, Volume 5, Number 2, 285-309, 1955.

[7] Garret Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society.

[8] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. ISBN: 0-444-19451-7.

[9] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1959.

[10] Aristotle. *Ethics*.
https://www.amazon.com/ARISTOTLE-Tredennick-Jonathan-Aristotle-Thomson/dp/B000XYGK7K